

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.053>

УДК 539.421

А.С. Колядюк, <https://orcid.org/0000-0003-2946-272X>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

E-mail: duk86@outlook.com

Коливання сферично-циліндричної комбінованої оболонки під дією плоскої ударної хвилі

Представлено членом-кореспондентом НАН України М.Ф. Селівановим

Дослідження оболонок складної форми, особливо для комбінованих сферичних і циліндричних оболонок, останнім часом стали важливим та актуальним завданням. Крім того, проблеми з коливаннями неминуче виникають внаслідок дії на такі комбіновані оболонкові конструкції експлуатаційних навантажень. Варто зауважити, що однією з головних проблем таких досліджень є визначення коректних навантажень на складні оболонкові конструкції під дією швидкоплинних ударних навантажень. При цьому якість кінцевого результату залежить від коректного вирішення обох задач, які фактично належать до двох різних напрямів: обчислювальної гідродинаміки та обчислювальної динаміки твердого тіла. У статті розглянуто взаємодію ударної хвилі з крутим фронтом і стрибком тиску $\Delta P = 1 \cdot 10^6$ зі сферично-циліндричною комбінованою оболонкою типу циліндр—півсфера (радіус циліндричної та сферичної частин 324 мм). Цей клас досліджень виконано із застосуванням підходів до вирішення суміжних проблем механіки твердого тіла та обчислювальної динаміки рідини. Отримано значення параметрів тиску (у вигляді дифракційного тиску) під час набігання ударної хвилі на складну оболонку. Проаналізовано коливальні процеси складної оболонки під дією динамічного навантаження.

Ключові слова: коливання, сферично-циліндрична оболонка, ударне навантаження, обчислювальна гідродинаміка, пов'язана задача, в'язке середовище, рівняння Нав'є—Стокса, усереднення за Рейнольдсом.

Вступ. Для розв'язання пов'язаних задач взаємодії ударної хвилі з оболонковими конструкціями на практиці частіше засовуються розділені підходи, які використовують окремі коди обчислювальної гідродинаміки та обчислювальної динаміки твердого тіла шляхом поєднання їх спеціальними інтерфейсами. Тому, застосовуючи такий підхід, на практиці можна використовувати спрощені моделі для в'язкого середовища та конструкційних елементів, коли це дозволяє досліджуваний випадок. Наприклад, конструкційні елементи можна моделювати за допомогою теорії балок або теорії оболонок. Завдяки роз-

Цит у в а н н я: Колядюк А.С. Коливання сферично-циліндричної комбінованої оболонки під дією плоскої ударної хвилі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 6. С. 53—61. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.053>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

витку таких процедур розроблено різні схеми сполучення для забезпечення стабільності та точності цих методів [1].

У роботі [2] експериментально та чисельно було досліджено взаємодію плоскої ударної хвилі з квадратним резонатором. Показано, що такий складний, залежний від часу процес, може бути змодельований відносно простим способом. Запропонована фізична модель — це рівняння Ейлера, які розв'язуються чисельно за схемою другого порядку з високою роздільною здатністю, що дає дуже хороший збіг з експериментально отриманими результатами.

У роботі [3] досліджено рух тонкої пружної пластини, яка взаємодіє з в'язкою рідиною. Розглянуто періодичну силу, що діє на пластину, яка в умовах без демпфування призводить до резонансної реакції. З використанням рівняння Нав'є—Стокса і пластини Кірхгофа—Лява в періодичній комірковій структурі змодельовано рух в'язкої рідини та пружної пластини відповідно. Показано, що взаємодія з в'язкою рідиною забезпечує механізм демпфування за рахунок розсіювання енергії в середовищі.

У дослідженні [4] розроблено розрахунково-експериментальну методику розв'язання динамічних задач тришарової комбінованої оболонки півсфера—циліндр у разі дії на неї плоскої ударної хвилі. Використано конструктивно-ортотропну модель тришарової оболонкової структури зі стільниковим заповнювачем, для якої інтегральні значення модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона визначаються з експерименту. За допомогою скінченно-різницевого методу розв'язано відповідні задачі математичної теорії пружності. Проаналізовано отримані числові результати.

У цій статті вирішується задача набігання ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом і стрибком тиску $\Delta P = 1 \cdot 10^6$ Па на модель типу циліндр—півсфера (радіус циліндричної і сферичної частин становив 324 мм), що повторює геометрію обтічника. Розв'язання цього класу нестационарних задач актуальне у зв'язку з необхідністю дослідження поведінки конструкційних елементів, які використовуються в умовах безпосереднього контакту з в'язкими середовищами. Цей клас досліджень потребує застосування підходів розв'язання пов'язаних задач механіки твердого тіла та гідрогазодинаміки.

Мета дослідження — визначення взаємодії ударної хвилі з оболонковими конструкціями та аналіз динамічної поведінки конструкції за швидких динамічних процесів.

Постановка задачі. Для розв'язання сумісної задачі використовували розділений підхід. На першому етапі розв'язували задачу обчислювальної гідродинаміки. Далі отримані розподілення дифракційного тиску передавали в задачу динаміки оболонки на модель типу циліндр—півсфера. Моделювали поведінку оболонки у в'язкому середовищі протягом $1 \cdot 10^{-3}$ с. При цьому використовували крок з часом $5 \cdot 10^{-7}$ с.

На рис. 1. зображено розрахункову область сферично-циліндричної комбінованої оболонки і навколишнього середовища. Під час моделювання нормальної ударної хвилі для початкового часу ($t = 0$) у лівій частині розрахункової моделі (див. рис. 1) задавали швидкість, тиск і температуру повітря, отримані з рівнянь термодинамічного стану ударної хвилі [5], у правій частині — швидкість, тиск і температуру повітря для нормальних умов. Основними граничними умовами для сумісної задачі є умови непроникнення на стінках обтічника.

Середовище моделювали як ідеальний газ, в даному випадку повітря, без врахування в'язкості. Поведінку середовища під час поширення хвилі моделювали за допомогою рів-

нянь Нав'є—Стокса, усереднених за Рейнольдсом [6, 7], які в даному випадку спрощуються до рівнянь Ейлера. При цьому поведінку газу моделювали як суцільну ламінарну течію (без врахування ефектів турбулентності та кавітації), яка для випадку двовимірної осесиметричної задачі описується рівняннями збереження маси (1), імпульсу (2, 3) та енергії (4).

Рівняння збереження маси, або рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\rho v_r}{r} = 0, \quad (1)$$

де v_x, v_r — вектори швидкості (x — аксіальний, r — радіальний напрямки); ρ — щільність.

Рівняння збереження імпульсу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(r \rho v_x v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r v_x) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(r \rho v_x v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r v_r) = 0. \quad (3)$$

Рівняння збереження енергії:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla(\vec{v}(\rho E + p)) = 0, \quad (4)$$

де p — статичний тиск; $E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ — енергія на одиницю маси; h — ентальпія; V — об'єм.

Термодинамічний стан ударної хвилі описується за допомогою рівнянь (5)—(7). При цьому швидкість поширення хвилі (M) обчислюється за допомогою рівняння

$$p_2 = p_1 \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right), \quad (5)$$

де абсолютний тиск $p_2 = 1 \cdot 10^6$ Па, а $p_1 = 1,0 \cdot 10^5$ Па; $k = 1,4$ показник адіабати для повітря.

Швидкість супутнього потоку ударної хвилі

$$v_2 = \frac{2\sqrt{kRT_1}}{k+1} \left(M - \frac{1}{M} \right), \quad (6)$$

де $R = 287$ Дж/(кг · К) — газова стала для повітря.

Температура повітря в хвилі

$$T_2 = T_1 \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} \frac{1}{M^2} \right). \quad (7)$$

При цьому, у випадку $\Delta P = 1 \cdot 10^6$ Па маємо такі значення для ударної хвилі: $M = 3,093$; $p_2 = 11$ бар; $v_2 = 805,78$ м/с; $T_2 = 846,1$ К.

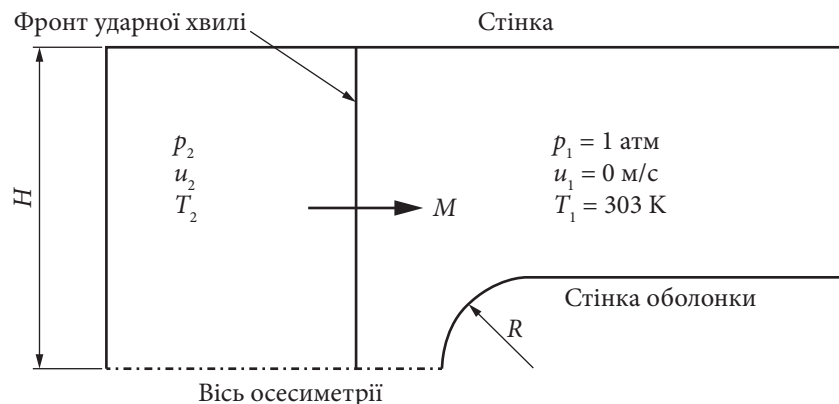


Рис. 1. Розрахункова область сферично-циліндричної комбінованої оболонки та навколишнього середовища



Рис. 2. Скінченно-елементна сітка розрахункової області для задачі обчислювальної гідродинаміки

На рис. 2 зображено скінченно-елементну сітку розрахункової області для задачі обчислювальної гідродинаміки.

Отримавши розподіл дифракційного тиску на стінках моделі типу циліндр—півсфера, далі розв’язували задачу динаміки оболонки, яку в матричному вигляді можна зобразити як

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K(u)]\{u\} = \{F(t)\}, \quad (8)$$

де $[M]$ — матриця мас; $[K]$ — матриця жорсткості; $\{F\}$ — вектор навантаження; $\{\ddot{u}\}$ — вузлові прискорення; $\{u\}$ — вузлові переміщення.

На рис. 3 проілюстровано геометрію моделі типу циліндр—півсфера. Для розв’язання задачі динаміки оболонки моделювали сегмент моделі ($\alpha = 1^\circ$). При цьому на поверхнях відсіченої частини моделі задавали умови симетрії у вигляді $u = 0$ та $\theta_y = \theta_z = 0$. Фактично

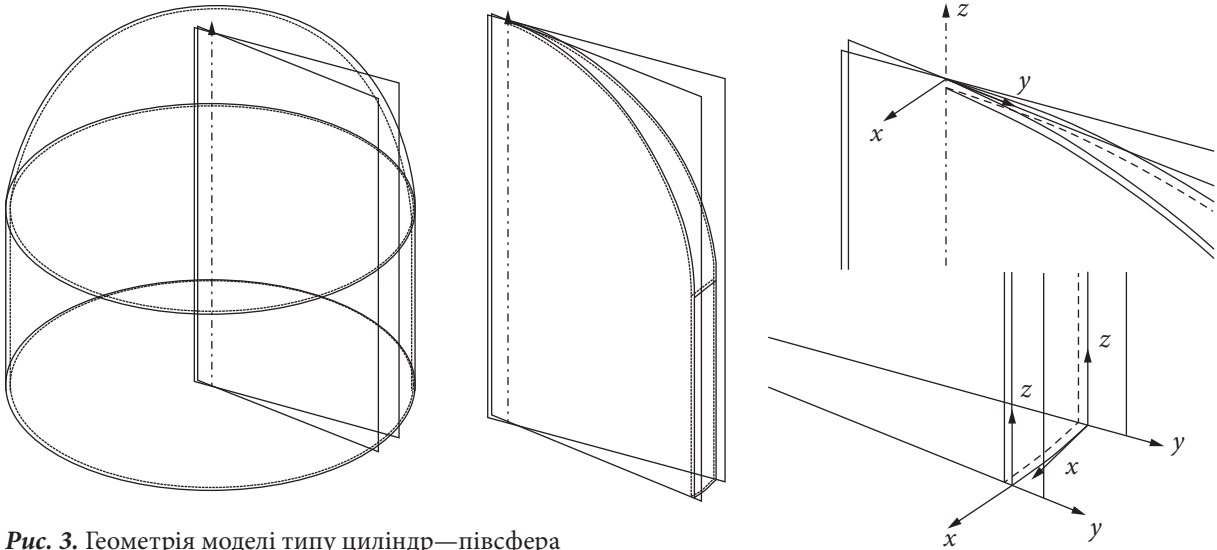


Рис. 3. Геометрія моделі типу циліндр—півсфера

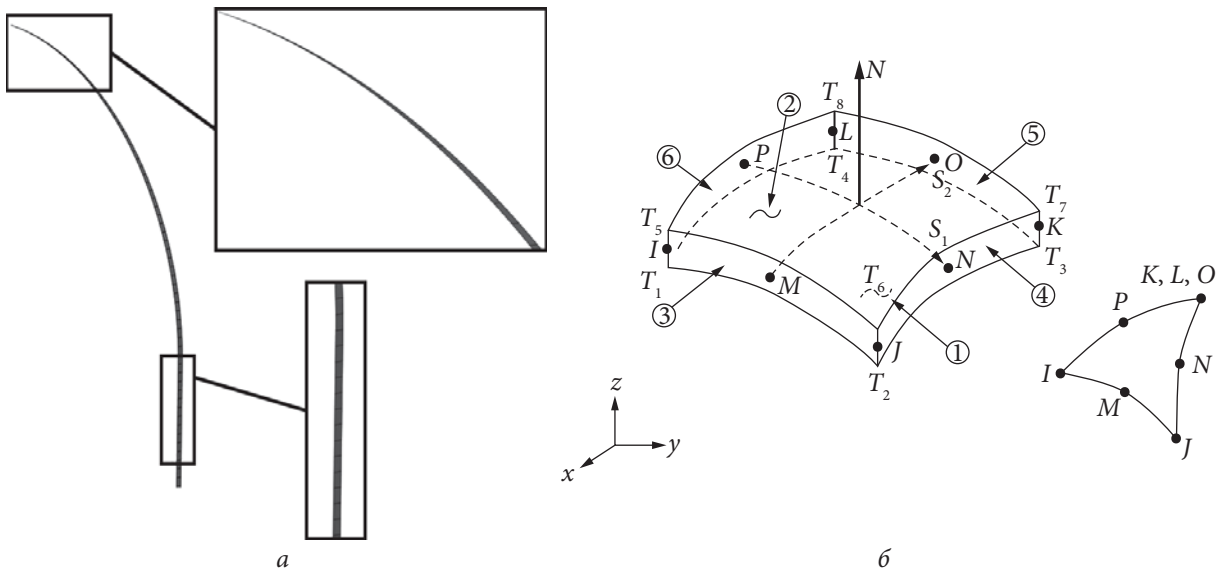


Рис. 4. Скінченно-елементна модель для сегмента моделі типу циліндр—півсфера

задача розв'язувалася в тривимірній постановці, але з мінімальною розмірністю скінченно-елементної сітки. Нижня частина циліндричної частини комбінованої оболонки мала жорсткі заземлення у вигляді $u = v = w = 0$ та $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$. У вершині сферичної частини комбінованої оболонки граничні умови мають такий вигляд: $u = v = 0$ та $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$.

На рис. 4, а зображено скінченно-елементну модель для сегмента моделі типу циліндр—півсфера, яка складається з 239 елементів та 1196 вузлів. Для моделювання використовували скінченний елемент Shell 281. Shell 281 – просторово-оболонковий восьмивузловий елемент з шістьма ступенями свободи в кожному вузлі (див. рис. 4, б). У цьому елементі реалізовано теорію оболонок Міндліна—Рейсснера.

Рівняння для напружень у матричній формі має вигляд

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

де $\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, $\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, $\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ — деформації.

Отже, поле напружень та деформацій описуються однією невідомою переміщення — зміщенням точки серединної поверхні $\omega(x, y)$.

Рівняння рівноваги записується у вигляді

$$D \nabla^4 \omega = q(x, y),$$

$$\text{де } \nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Функція форми для елемента, за допомогою якого визначаються переміщення та кути повороту всередині елемента, апроксимується за допомогою нелінійної функції

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{4}(u_I(1-s)(1-t)(-s-t-1) + u_J(1+s)(1-t)(s-t-1) + \\ & + u_K(1+s)(1+t)(s+t-1) + u_L(1-s)(1+t)(-s+t-1)) + \\ & + \frac{1}{2}(u_M(1-s^2)(1-t) + u_N(1+s)(1-t^2)) + \\ & + u_O(1-s^2)(1+t) + u_P(1-s)(1-t^2)). \end{aligned}$$

Для інших переміщень (v, w) і кутів повороту ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) функція форми має аналогічний вигляд.

Матрицю жорсткості для скінченного елемента можна записати у вигляді

$$K = D \iint_A BCB^T dA,$$

$$\text{де } B = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 N}{\partial s \partial t} \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

Числові результати. У результаті розв'язання задачі обчислювальної гідродинаміки було визначено значення тиску в розрахунковій області, у тому числі і на поверхні моделі

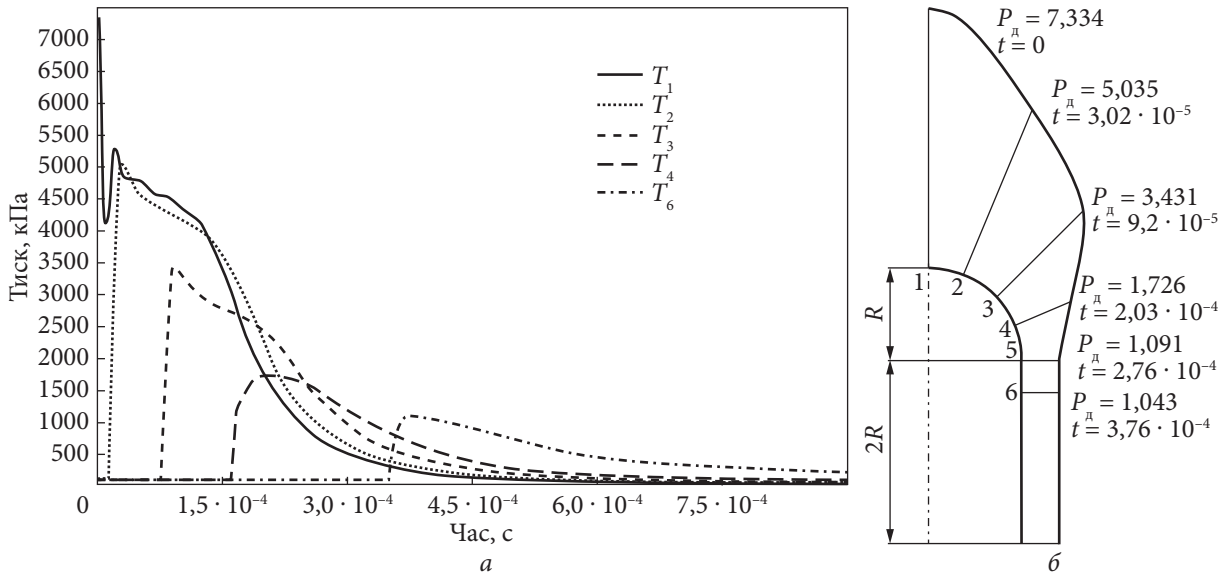


Рис. 5. Розподіл дифракційного тиску

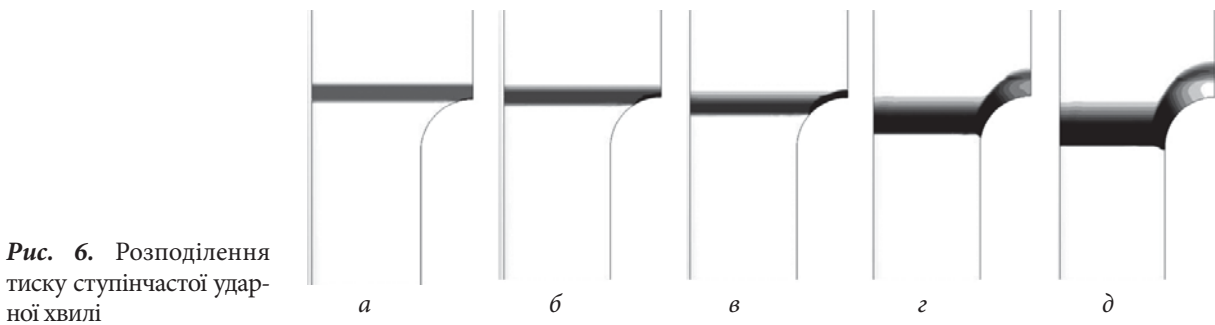


Рис. 6. Розподілення тиску ступінчастої ударної хвилі

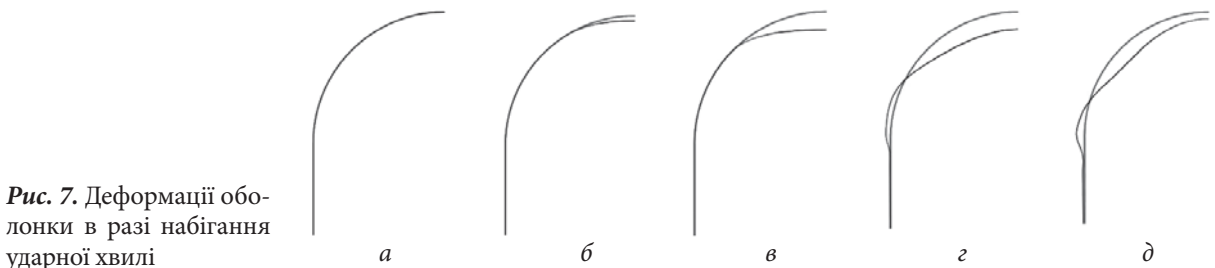


Рис. 7. Деформації оболонки в разі набігання ударної хвилі

Чисельні значення фронтальних величин безрозмірного та розмірного дифракційного тиску

Показник	Номер точки					
	1	2	3	4	5	6
$t, \text{с}$	0	$3,02 \cdot 10^{-5}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$	$2,03 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$
$P_{\pi}, \text{кПа}$	7334,1	5035,4	3431,4	1725,63	1091,46	1091,46
$P_{\pi}/\Delta P$	7,334	5,035	3,431	1,726	1,091	1,091

типу циліндр—півсфера. На рис. 5, а наведено розподіл дифракційного тиску для шести точок на поверхні комбінованої сферично-циліндричної оболонки. На рис. 5, б схематично зображено місце кожної точки і значення безрозмірного дифракційного тиску та час, в який це значення отримано. Максимальні значення дифракційного тиску встановлено для вершини сферичної частини комбінованої оболонки — 7,334 МПа (точка 1 на рис. 5, б). У цій області хвиля набігає під прямим кутом. Для інших точок, які аналізуються, значення дифракційного тиску зменшується зі збільшенням кривизни сферичної частини комбінованої оболонки відносно фронту ударної хвилі. При цьому на сферичній частині дифракційний тиск знижується до значення 1,091 МПа.

На рис. 6 графічно зображено розподілення тиску ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом для різних моментів часу: $a — 0$ с; $b — 3,31 \cdot 10^{-5}$ с; $v — 8,63 \cdot 10^{-5}$ с; $z — 1,99 \cdot 10^{-4}$ с; $d — 2,67 \cdot 10^{-4}$ с. У таблиці наведено максимальні значення дифракційного і безрозмірного дифракційного тиску $P_d/\Delta P$ з відповідним часом для шести точок.

На рис. 7 у верхній частині представлено деформації оболонки в разі набігання ударної хвилі з крутим фронтом для різних моментів часу: $a — 0$ с; $b — 3,31 \cdot 10^{-5}$ с; $v — 8,63 \cdot 10^{-5}$ с; $z — 1,99 \cdot 10^{-4}$ с; $d — 2,67 \cdot 10^{-4}$ с.

Висновок. Досліджено взаємодію ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом зі сферично-циліндричною комбінованою оболонкою. Визначено параметри навантаження (у вигляді дифракційного тиску) у разі набігання ударної хвилі на оболонці. Встановлено, що внаслідок набігання ударної хвилі з крутим фронтом на поверхні сферично-циліндричної комбінованої оболонки залежно від часу відбувається складна зміна дифракційного тиску. При цьому різні області конструкції залежно від розташування відносно фронту набігаючої хвилі мають різний характер зміни дифракційного тиску. Проаналізовано коливальні процеси оболонки складної форми за динамічного навантаження. Дослідження динамічних процесів у таких комбінованих оболонках під дією динамічних навантажень становить значний інтерес для конструкторських розробок.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Brousseau P., Benaouicha M., Guillou S. Hydrodynamic efficiency analysis of a flexible hydrofoil oscillating in a moderate Reynolds number fluid flow. *Energies*. 2021. **14**. 4370. <https://doi.org/10.3390/en14144370>
2. Igra O., Falcovitz J., Reichenbach H., Heilig W. Experimental and numerical study of the interaction between a planar shock wave and a square cavity. *J. Fluid Mech.* 1996. **313**. P. 105—130. <https://doi.org/10.1017/S0022112096002145>
3. Celik A., Kyed M. Fluid-plate interaction under periodic forcing. arXiv:2103.00795 [math.AP]. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.00795>
4. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. Dynamic design of compound shell structures of revolution under nonstationary loads. *Int. Appl. Mech.* 2020. **56**, № 1. P. 22—32. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00993-0>
5. Handbook of Shock Waves. Vol. 1: Ben-Dor G., Igra O., Elperin T. (Eds.). Amsterdam: Elsevier; 2001. 889 p.
6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Москва: Физматгиз, 1963. 632 с.
7. Anderson J.D. Modern compressible flow: with historical perspective. New York, NY: McGraw-Hill, 2003. 776 p.

Надійшло до редакції 29.10.2024

REFERENCES

1. Brousseau, P., Benaouicha, M. & Guillou, S. (2021). Hydrodynamic efficiency analysis of a flexible hydrofoil oscillating in a moderate Reynolds number fluid flow. *Energies*, 14, 4370. <https://doi.org/10.3390/en14144370>
2. Igra, O., Falcovitz, J., Reichenbach, H. & Heilig, W. (1996). Experimental and numerical study of the interaction between a planar shock wave and a square cavity. *J. Fluid Mech.*, 313, pp. 105-130. <https://doi.org/10.1017/S0022112096002145>
3. Celik, A. & Kyed, M. (2021). Fluid-plate interaction under periodic forcing. arXiv:2103.00795 [math.AP]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.00795>
4. Lugovoi, P. Z., Meish, V. F., Meish, Yu. A. & Orlenko S. P. (2020). Dynamic design of compound shell structures of revolution under nonstationary loads. *Int. Appl. Mech.*, 56, № 1, pp. 22-32. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00993-0>
5. Ben-Dor, G., Igra, O. & Elperin, T. (Eds.). (2001). *Handbook of shock waves* (Vol. 1). Amsterdam: Elsevier.
6. Zeldovich, Ya. B. & Raiser, Yu. P. (1963). *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Moscow: Fizmatgiz.
7. Anderson, J. D. (2003). *Modern compressible flow: with historical perspective*. New York, NY: McGraw-Hill.

Received 29.10.2024

A.S. Koliadiuk, <https://orcid.org/0000-0003-2946-272X>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: duk86@outlook.com

OSCILLATIONS OF SPHERICAL-CYLINDRICAL COMBINED SHELL
UNDER THE ACTION OF A PLANE SHOCK WAVE

The study of shells with complex shapes, especially combined spherical and cylindrical shells, has recently become an important and urgent task. In addition, when operational loads are applied to such combined shell structures, vibration problems inevitably arise. It should be noted that one of the main problems of such studies is the determination of correct loads on complex shell structures under the action of fast impact loads. The quality of the final result depends on the correct solution of both problems, which actually belong to two different directions: computational fluid dynamics and computational solid dynamics. The interaction of a shock wave with a steep front and a pressure jump $\Delta P = 1 \cdot 10^6$ with with a spherical-cylindrical combined shell of cylinder-half-sphere type (radius of cylindrical and spherical parts 324 mm) was studied. This class of studies was carried out using different approaches to solving related problems of solid mechanics and computational fluid dynamics. The value of pressure parameters (in the form of diffraction pressure) at rolling of a shock wave on a shell was obtained. The vibrational processes of a complex shell under the action of dynamic loading are analyzed.

Keywords: *oscillations, spherical-cylindrical shell, shock load, computational fluid dynamics, coupled problem, viscous medium, Navier—Stokes, Reynolds.*