

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.062>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

Ю.О. Чорноіван, <https://orcid.org/0000-0002-0805-4017>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

E-mail: selivanov20@nas.gov.ua, yurchor@ukr.net

Дослідження траєкторії тріщини змішаного режиму руйнування за допомогою неявної схеми

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

Досліджується траєкторія похилої тріщини в плоскому елементі конструкції з використанням неявної схеми, оптимізованої для досягнення точності в аналізі змішаного режиму руйнування. Розроблена схема забезпечує точне виконання умови рівності нулю коефіцієнта інтенсивності зсувних напружень (КІН) на кожному кроці алгоритму, що дозволяє точно відслідковувати напрямки розвитку тріщини. Розроблено адаптивний алгоритм для генерації регулярної сітки в межах кругової зони, що оточує вершину тріщини, змодельованої кусково-лінійною кривою. Такий підхід до створення сітки дозволяє покращити точність обчислення КІН, що підтверджується шляхом порівняння з відомими з літератури розв'язками для руйнування нормальним відривом. Крім того, проаналізовано залежність зсувного КІН від кута повороту другого сегмента тріщини в умовах критичного стану. Результат аналізу дозволив спростити алгоритм неявної схеми. Для подальшої перевірки було проведено паралельне дослідження з використанням нерегулярної сітки, згенерованої вбудованими функціями MATLAB, що продемонструвало порівнянну точність у визначенні КІН для різних типів сітки. Проілюстровано розраховану траєкторію тріщини та розподіл поля напружень фон Мізеса навколо її вершини, що надає змогу скласти повне уявлення про поведінку напружень та вплив уточнення сітки на прогнозування траєкторії.

Ключові слова: похила тріщина, змішаний режим руйнування, кут повороту тріщини, метод скінченних елементів, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Визначення траєкторії поширення тріщини має вирішальне значення для розуміння структурної цілісності матеріалів, оскільки воно виявляє потенційні осередки руйнування та допомагає оцінити загальну стійкість елемента конструкції. Розуміння траєкторій розвитку тріщин дозволяє розробляти запобіжні заходи і сприяє створенню більш надійних конструкцій, зрештою підвищуючи безпеку, довговічність і продуктивність.

Цитування: Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Дослідження траєкторії тріщини змішаного режиму руйнування за допомогою неявної схеми. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 6. С. 62—68. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.062>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Більшість доступних у літературі методів вивчення поширення тріщини добре підходять для проблем руйнування із заздалегідь відомими шляхами розповсюдження. Однак, коли траєкторія поширення тріщини невідома, виникають значні складнощі, особливо щодо геометрії сітки, яка повинна узгоджуватися з еволюцією траєкторії тріщини на кожному кроці приросту довжини. Це вимагає безперервного повторного створення сітки — процесу, керованого відповідними адаптивними методами, що забезпечує послідовне автоматичне оновлення сітки.

При моделюванні траєкторій тріщини методом скінченних елементів (МСЕ) важливу роль відіграє малість приростів тріщини, Δa , порівняно із початковою довжиною тріщини a . Вона істотно впливає на точність визначення траєкторії поширення тріщини, гладкість якої при цьому залишається розривною [1]. Як правило, для такого моделювання використовується явний алгоритм, де напрямок кожного наступного сегмента тріщини, позначений θ , визначається в рамках лінійно-пружної механіки руйнування з використанням коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_I і K_{II} . На відміну від явних схем, неявні схеми визначають кожен наступну позицію вершини тріщини, забезпечуючи виконання рівності $K_{II}(a + \Delta a) = 0$, тобто умови, яку часто просто апроксимують у рамках явної схеми.

У більшості випадків КІН оцінюють на основі J -інтеграла, який обчислюється шляхом інтегрування характеристик поля вздовж контуру, що оточує вершину тріщини. При інтегруванні можуть бути використані регулярні або нерегулярні сітки [2]. З удосконаленням обчислювальних засобів повторне створення сітки областей, що містять тріщини, які поширюються, стало значно швидшим, часто потребуючи менше часу, ніж первинний процес розв'язання МСЕ.

Мета даної роботи подвійна: по-перше, розробити неявний алгоритм для визначення кута відхилення на кожному етапі поширення тріщини за умов змішаного режиму руйнування. Цей алгоритм має обчислювати зсувний КІН для різних кутів відхилення, щоб визначити кут, при якому КІН дорівнює нулю, забезпечуючи точне прогнозування траєкторії тріщини. По-друге, робота має на меті оцінити точність розрахунків КІН шляхом порівняння результатів регулярних і нерегулярних конфігурацій сітки навколо вершини тріщини, таким чином забезпечуючи надійність застосування алгоритму для різних типів розбивки.

Розгляньмо наскрізну тріщину в ізотропній пластині з розмірами $2d \times 2d$ (рис. 1, а). Шлях поширення тріщини представлено у вигляді кусково-лінійної кривої, кожна ділянка якої визначається її довжиною та кутом нахилу θ . Для одного сегмента, нахиленого під кутом $\theta_1 = 0$, маємо тріщину нормального відриву. У [2] для цієї конфігурації тріщини визначено КІН для моди I, $K_I = 568,3416 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^{1/2}$ з параметрами $a = 10 \text{ мм}$ (напівдовжина тріщини), $d = 100 \text{ мм}$, $\sigma = 100 \text{ МПа}$, $E = 210 \text{ ГПа}$ і $\nu = 0,3$.

Спочатку було визначено КІН тріщини за допомогою J -інтеграла з використанням адаптивного алгоритму для побудови регулярної сітки в межах кругової області заданого радіуса навколо вершини тріщини. Регулярність цієї сітки контролюється трьома параметрами: кількістю допоміжних кіл, n_{rings} , кількістю секторів, n_{sectors} та коефіцієнтом k , який масштабує ширину кожного наступного кільця відносно попереднього. Збільшення k збільшує щільність сітки біля вершини тріщини, дозволяючи точніше представити високий градієнт поля у цій області. Рис. 1, б ілюструє зразок регулярної сітки для параметрів $n_{\text{rings}} = 6$ і $n_{\text{sectors}} = 8$.

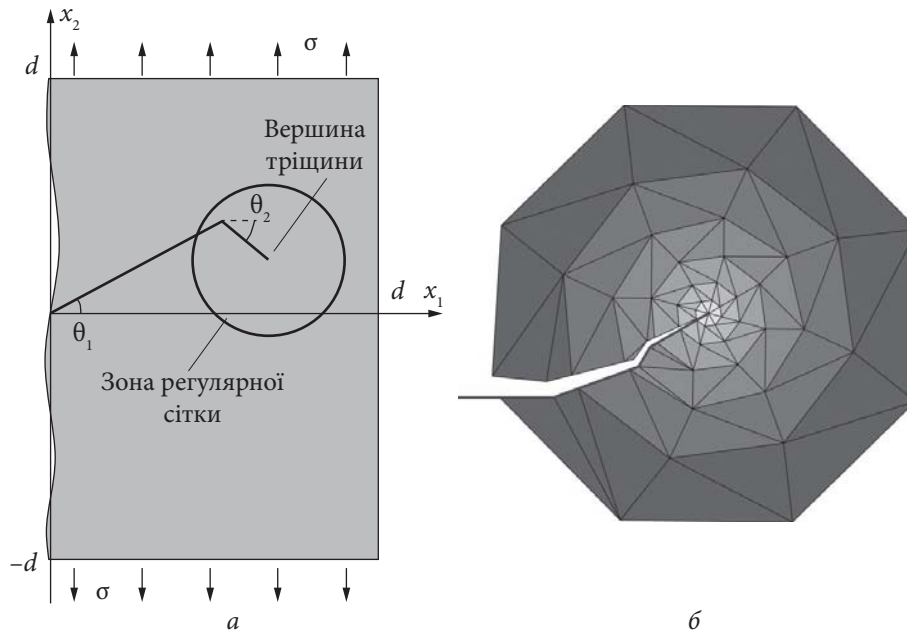


Рис. 1. Елемент конструкції з кусково-лінійною тріщиною і зразок регулярної сітки в околі вершини

Щоб точно визначити параметри тріщиностійкості в змішаному режимі, Ішікава та колеги [4] запропонували розкласти J -інтеграл на окремі компоненти моди I та II. Цей метод дозволяє розділити поля напружень, деформацій та переміщень на частини чистої моди I та II за довільних змішаних умов навантаження за умови, що шлях інтегрування є симетричним відносно лінії тріщини. Ми використовуємо цей підхід для визначення компонентів J_I і J_{II} J -інтеграла, а потім на їх основі обчислюємо КІН.

На рис. 2 наведено порівняння точності розрахунків КІН для трьох різних наборів параметрів регулярності з радіусом зони регулярності $r = 0,3a$. Результати вказують на невелике покращення точності зі збільшенням k у діапазоні (1,3,1,5).

На рис. 3 проілюстровано зсувний КІН як функцію кута нахилу θ_2 другого відрізка приросту тріщини (довжина цього відрізка $a_2 = 0,01a$), при цьому нахил першого сегмента тріщини задано кутом $\theta_1 = 30^\circ$. Дані розрахунки виконано для критичного стану ($K_I = K_{Ic}$) з енергією руйнування $J_{Ic} = 0,75$ Н/мм. Було використано наступні параметри регулярної сітки: $n_{\text{rings}} = 10$, $n_{\text{sectors}} = 16$ і $k = 1,8$. Для вибраного малого приросту довжини тріщини кут напрямку поширення тріщини виявився близьким до значення, передбаченого класичною теорією Ердогана і Сі [3 або 2, с. 125]. Однак із збільшенням a_2 класична теорія дає відхилення зсувного КІН від нуля.

За критичних умов залежність зсувного КІН від кута повороту виявилась близькою до лінійної, що дозволяє побудувати неявний алгоритм визначення траєкторії тріщини. Через неточність у побудові залежності $K_{II}(\theta_2)$ (внаслідок зміни сітки) розв'язати систему $K_{II}(\theta_2, \sigma) = K_{Ic}$, $K_{II}(\theta_2, \sigma) = 0$ обчислювальними методами складно. Щоб усунути цю проблему, використано лінію регресії через три або більше точок залежності $K_{II}(\theta_2)$, отриманої за умов граничного стану $K_I(\theta_2, \sigma) = K_{Ic}$. Тоді корінь рівняння $K_{II}(\theta_2) = 0$ буде шуканим кутом повороту.

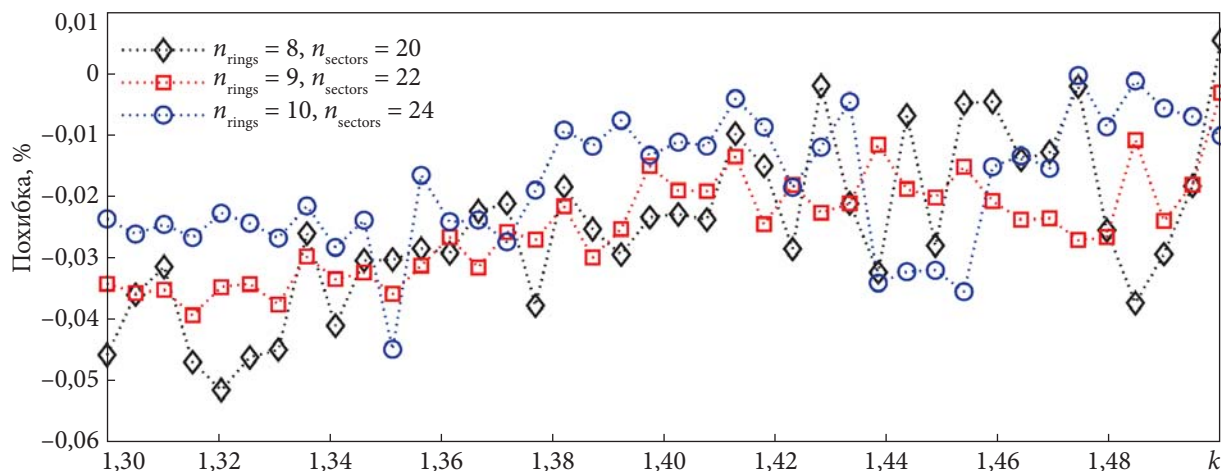


Рис. 2. Порівняння значень КІН для різних наборів параметрів регулярної сітки

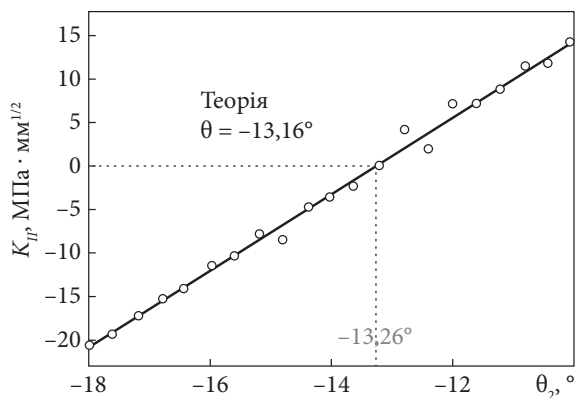


Рис. 3. Залежність зсувного КІН від нахилу сегмента приросту тріщини, обчислена на регулярних сітках

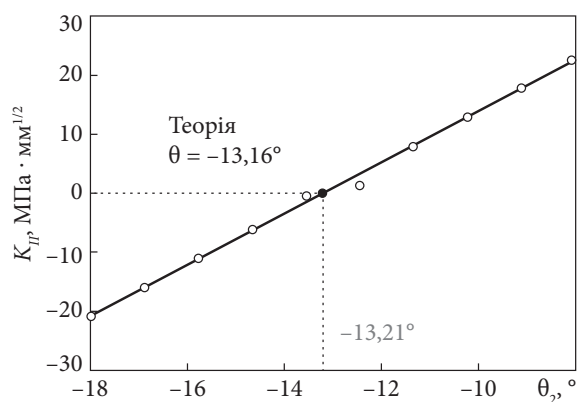


Рис. 4. Залежність зсувного КІН від кута повороту сегмента тріщини, обчислена на нерегулярних сітках

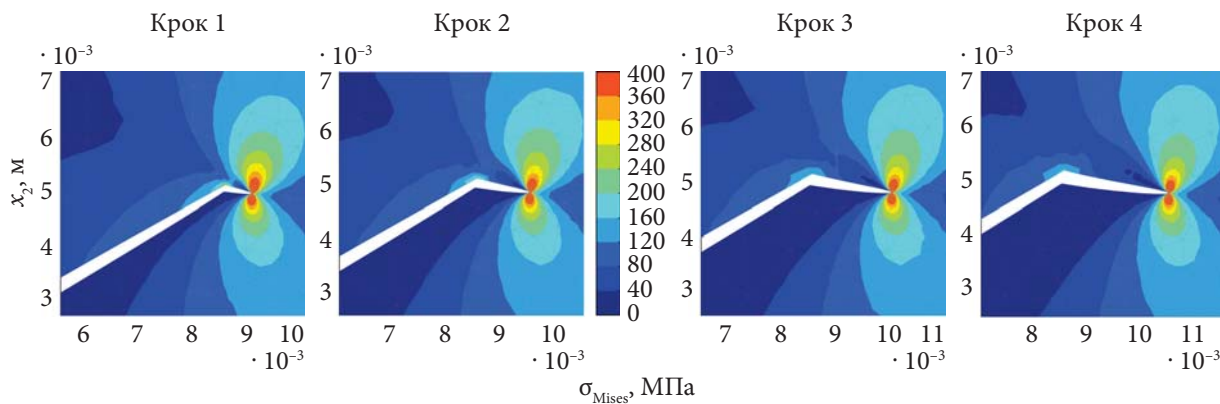


Рис. 5. Мізесові напруження в околі вершини тріщини під час її поширення

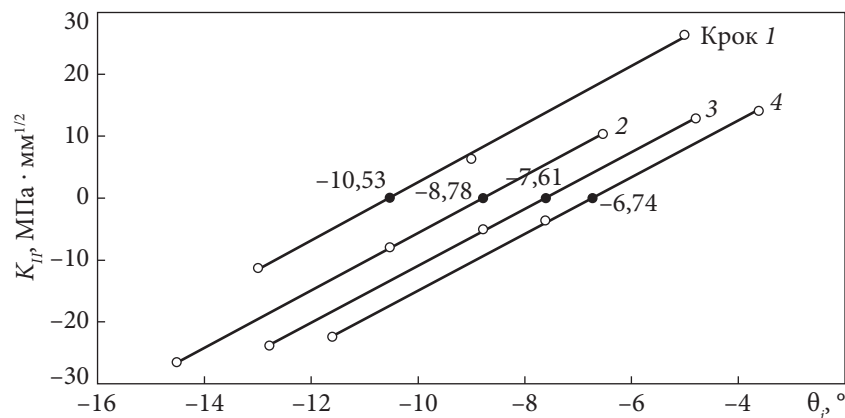


Рис. 6. Лінії регресії залежності зсувного КІН від кута повороту сегмента та визначені кути відхилення тріщини

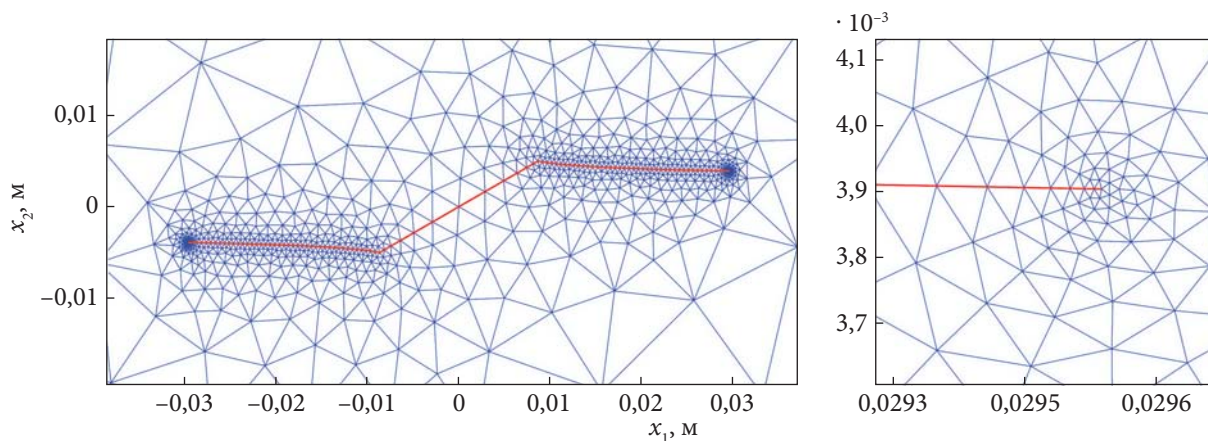


Рис. 7. Сітка в околі тріщини і її вершини на останньому кроці алгоритму

Для демонстрації ефективності описаного вище алгоритму в рамках даної роботи виконані розрахунки КІН за допомогою нерегулярної сітки. При цьому використано функцію MATLAB generateMesh, яку налаштовано за допомогою чотирьох параметрів: hmin (вказує мінімальний розмір елемента в сітці, що впливає на щільність сітки в областях із високими градієнтами напруження), hmax (визначає максимальний розмір елемента, який зазвичай встановлюється для забезпечення ефективності в областях із низькими варіаціями напруження), hgrad (контролює швидкість переходу розміру елемента між областями з різною щільністю сітки) і hvertex (визначає розмір елемента у вершинах, дозволяючи подальше уточнення поблизу критичних точок, таких як вершини тріщини).

Подібно до рис. 3, рис. 4 ілюструє зсувний КІН як функцію кута нахилу θ_2 для другого відрізка довжини $a_2 = 0,01a$. Очевидною є та сама лінійність, хоча у випадку з нерегулярною сіткою відхилення від лінії регресії є меншим, ніж для випадку з регулярною сіткою.

На рис. 5 показано розподіл мізесових напружень поблизу вершини тріщини для перших чотирьох кроків поширення, кожен з розміром приросту $a_i = 0,05a$. Розв'язки було отримано з використанням наступних параметрів сітки: $h_{\min} = 0,02a_i$, $h_{\text{grad}} = 1,4$, $h_{\max} = d/6$ і $h_{\text{vertex}} = h_{\min}$.

На рис. 6 наведено лінії регресії залежності зсуву КІН від кута повороту для перших чотирьох кроків побудови траєкторії тріщини. На кожному кроці ці лінії визначено з використанням трьох показаних точок із співвідношення для $K_{II}(\theta_2)$, отриманого з урахуванням умови критичного стану $K_I = K_{Ic}$.

На рис. 7 представлена траєкторія поширення тріщини разом із конфігурацією сітки на останньому розрахунковому кроці алгоритму. У другому блоці малюнка збільшено показано сітку біля вершини тріщини із подробицями розташування вузлів сітки в цій критичній області.

Висновки. Розроблено неявну схему побудови алгоритму поширення тріщини, у якій строго виконується рівність нулю зсувного КІН, на відміну від явної схеми, у якій цю умову виконано наближено. Неявний підхід базується на лінійності залежності зсувного КІН, обчисленого за умов критичного стану $K_I = K_{Ic}$, від кута повороту тріщини.

Оцінено вплив на визначення КІН як регулярного, так і нерегулярного підходів до побудови сітки, використано методики визначення перерозподілу напружень навколо вершини тріщини в міру її поширення, придатні до застосування в рамках нелінійної механіки руйнування з використанням когезійної моделі зони передруйнування [5], та проілюстровано еволюцію траєкторії тріщини, що може бути використано для побудови експертних систем за допомогою нейронних мереж [6].

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory-Numerics-Applications. Berlin: Springer, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6680-8>
2. Greco F., Ammendolea D., Lonetti P., Pascuzzo A. Crack propagation under thermo-mechanical loadings based on moving mesh strategy. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2021. **114**. 103033. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103033>
3. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng.* 1963. **85**, № 4. P. 519—525. <https://doi.org/10.1115/1.3656897>
4. Ishikawa H., Kitagawa H., Okamura H J-integral of mixed mode crack and its application. In: Proceedings of 3rd international conference on mechanical behaviour of materials (vol. 3). Pergamon Press. 1980. P. 447—455. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8414-9.50137-1>
5. Feng Y., Li J. Phase-field method with additional dissipation force for mixed-mode cohesive fracture. *J. Mech. Phys. Solids*. 2022. **159**. 104693. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104693>
6. Parsania A., Kakavand E., Hosseini S.A., Parsania A. Estimation of multiple cracks interaction and its effect on stress intensity factors under mixed load by artificial neural networks. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2024. **131**. 104340. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104340>

Надійшло до редакції 07.11.2024

REFERENCES

1. Kuna, M. (2013). *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory-Numerics-Applications*. Berlin: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6680-8>
2. Greco, F., Ammendolea, D., Lonetti, P. & Pascuzzo, A. (2021). Crack propagation under thermo-mechanical loadings based on moving mesh strategy. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 114, 103033. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103033>
3. Erdogan, F. & Sih, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng.*, 85, No. 4, pp. 519-525. <https://doi.org/10.1115/1.3656897>
4. Ishikawa, H., Kitagawa, H. & Okamura, H. (1980). J-integral of mixed mode crack and its application. In: *Proceedings of 3rd international conference on mechanical behaviour of materials* (vol. 3). Pergamon Press, pp. 447-455. <https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8414-9.50137-1>
5. Feng, Y. & Li, J. (2022). Phase-field method with additional dissipation force for mixed-mode cohesive fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 159, 104693. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104693>
6. Parsania, A., Kakavand, E., Hosseini, S. A. & Parsania, A. (2024). Estimation of multiple cracks interaction and its effect on stress intensity factors under mixed load by artificial neural networks. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 131, 104340. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104340>

Received 07.11.2024

M.F. Selivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

Y.O. Chornoivan, <https://orcid.org/0000-0002-0805-4017>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: selivanov20@nas.gov.ua, yurchor@ukr.net

INVESTIGATION OF MIXED-MODE CRACK TRAJECTORY USING IMPLICIT SCHEME

This paper presents a study of crack trajectory determination for an inclined crack in a planar structural element using an implicit investigation scheme optimized for the accuracy of mixed mode fracture analysis. The developed scheme ensures that the condition that the shear stress intensity factor (SIF) is zero at each algorithmic step holds strictly, enabling accurate tracking of crack propagation direction. For this purpose, an adaptive algorithm was developed to generate a regular mesh in the circular zone around the crack tip, modeled as a piecewise linear curve. This meshing approach improves the accuracy of SIF computation, which is validated through comparison with established mode I solutions in the literature. In addition, the dependence of the shear SIF on the rotation angle of the second crack segment under critical state conditions is analyzed to simplify the implementation of the implicit algorithm. For further validation, a parallel study using an irregular mesh generated by MATLAB's built-in meshing functions was conducted, which demonstrated comparable accuracy of SIF determination in different types of meshes. Finally, this paper shows the calculated crack trajectory and the von Mises stress field distribution around the crack tip for the first four propagation steps, which provides a comprehensive understanding of the stress behavior and the effect of mesh refinement on the trajectory prediction.

Keywords: *oblique crack, mixed-mode fracture, kinking angle, finite element method, stress intensity factor.*