

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.069>

УДК 539.375

**О.С. Богданова**<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0002-0397-6714>

**М.В. Дудик**<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>

**А.О. Камінський**<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0000-9989-6887>

**Ю.В. Решітник**<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

<sup>2</sup> Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини, Умань, Україна

E-mail: o.bogdanova@i.ua, dudyk\_m@hotmail.com, fract@inmech.kiev.ua, dikhtiarenko\_iu@udpu.edu.ua

## Модель зони передруйнування у квазікрихкому матеріалі біматеріального тіла біля вершини міжфазної тріщини в кутовій точці ламаної межі поділу

*Представлено членом-кореспондентом НАН України М.Ф. Селівановим*

*Розвинуто математичну модель зони передруйнування, яка в умовах плоскої деформації утворюється в матеріалі з квазікрихким механізмом руйнування біля вершини міжфазної тріщини в кутовій точці ламаної межі поділу. Зона передруйнування моделюється лінією розриву переміщення, на якій виконується умова міцності типу Мізеса—Хілла. Задачу про визначення параметрів зони зведено до векторного функціонального рівняння Вінера—Гопфа, для якого знайдено наближений аналітичний розв'язок. Виведено рівняння для розрахунку довжини і орієнтації зони передруйнування, фазового кута напружень і величини дисипації енергії в зоні.*

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, ламана межа поділу, зона передруйнування, умова міцності Мізеса—Хілла.

**Вступ.** Кутова точка ламаної межі поділу матеріалів є концентратором напружень зі ступеневу сингулярністю [1] і, як наслідок, джерелом процесів руйнування в її околі. Це обумовлює необхідність дослідження напружено-деформованого стану біля вершини кута зламу в рамках різного роду моделей з урахуванням утворення тріщин, зон передруйнування з тим чи іншим типом механізму руйнування тощо [2—6]. Розгляд подібних задач також може бути пов'язаний з проблемою руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною внаслідок стискання вздовж межі поділу [7, 8].

---

Ц и т у в а н н я: Богданова О.С., Дудик М.В., Камінський А.О., Решітник Ю.В. Модель зони передруйнування у квазікрихкому матеріалі біматеріального тіла біля вершини міжфазної тріщини в кутовій точці ламаної межі поділу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 6. С. 69—79. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.069>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

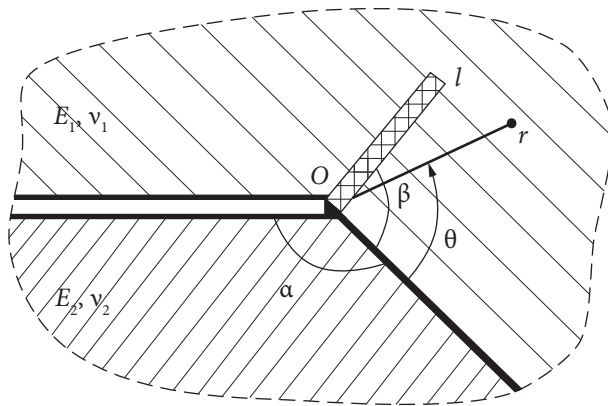


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

перешкоджає отриманню аналітичних розв’язків таких моделей і обумовлює використання переважно чисельних методів. Однак є також приклади успішної побудови аналітичних моделей зон передруйнування, зокрема, з використанням квадратичного критерію міцності типу Мізеса—Хілла в ортотропних однорідних тілах [9], у кусково-однорідних тілах з плоскою [10] та ламаною [2] межею поділу. Зокрема, в роботі [2] наведено аналітичний розв’язок задачі про зону передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у квазікрихкому з’єднувальному матеріалі (адгезиві) кусково-однорідного тіла з ламаною межею поділу.

**Мета** даної роботи — визначення параметрів зони передруйнування, яка розвивається у біматеріальному тілі біля вершини міжфазної тріщини в кутовій точці ламаної межі поділу в одному із з’єднаних матеріалів (адгеренті) з квазікрихким механізмом руйнування. Подібна задача у випадку кусково-однорідного тіла з плоскою межею поділу розв’язана в [10].

**Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про визначення параметрів зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Матеріали характеризуються модулями Юнга  $E_1, E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  відповідно. Перший матеріал розглядаємо як квазіпружний, тоді як другий вважаємо пружним. Квазіпружність першого матеріалу означає його лінійну пружність всюди, крім зони передруйнування. Зону передруйнування в першому матеріалі моделюємо лінією розриву переміщення, нахиленою під кутом  $\beta$  до межі поділу. Напружений стан у зоні в полярній системі координат з початком у кутовій точці межі поділу задаємо компонентами нормального і дотичного напружень  $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  на лінії розриву, які задовольняють критерій міцності типу Мізеса—Хілла

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_1}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

де  $\sigma_1, \tau_1$  — опори відриву та зсуву першого матеріалу відповідно.

Вважаючи довжину зони передруйнування  $l$  значно меншою, ніж довжина тріщини  $L$ , розглядатимемо тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченим розрізом на межі поділу і лінією розриву переміщення скінченної довжини, яка починається у вершині розрізу і поширюється в перший матеріал під кутом  $\beta$  до межі поділу (рисунок). Це дає

До руйнування кусково-однорідних тіл може призводити квазікрихке руйнування матеріалів його компонентів. У процесах квазікрихкого руйнування важливу роль відіграють пластичні деформації, локалізовані в маломасштабних областях матеріалу біля концентраторів напружень. Одним із методів їх урахування є використання моделей зон передруйнування типу Леонова, Панасюка і Дагдейла, які подають зони поверхнями розриву переміщення із заданими на них умовами міцності. Нелінійність більшості критеріїв міцності

можливість сформулювати умову на нескінченності у вигляді вимоги переходу шуканого розв'язку задачі на відстанях  $l \ll r \ll L$  в асимптотику відомого розв'язку аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву [3].

Враховуючи умову (1) і вважаючи береги тріщини вільними від напружень, вихідну задачу зводимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\alpha \cup 2\pi - \alpha: \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0;$$

$$\theta = \beta: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad (3)$$

$$\theta = \beta, r < l: \sigma_\theta = \sigma_1 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 \sin \psi(r);$$

$$\theta = \beta, r > l: \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (4)$$

$$\theta = \beta, r \rightarrow \infty: \sigma_\theta \sim \sum_i C_i F_1(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta} \sim \sum_i C_i F_2(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i}. \quad (5)$$

Тут  $\alpha$  — кут зламу межі поділу;  $\langle f \rangle$  — стрибок величини  $f$ ;  $C_i$  — довільні сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього навантаження і вважаються заданими за умовою;  $\lambda_i$  ( $-1 < \text{Re} \lambda_i < 0$ ) — показники сингулярності напружень в околі вершини тріщини, що є коренями характеристичного рівняння задачі  $D_0(\lambda) = 0$ ;  $F_1(\lambda, \theta)$ ,  $F_2(\lambda, \theta)$ ,  $D_0(\lambda)$  — функції, визначені в [3]. Індекс  $i = 1 \div 3$  нумерує показники сингулярності в порядку їх зростання; аналіз залежності показників від кута зламу межі поділу і відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів наведено в [3].

Параметр  $\psi(r)$ , введений в (4) для лінеаризації умови (1), визначає відношення дотичного і нормального напружень у зоні  $\left( \frac{\tau_{r\theta}(r, \beta)}{\sigma_\theta(r, \beta)} = \frac{\tau_1}{\sigma_1} \text{tg} \psi(r) \right)$  і близький за смыслом до фазового кута напружень, для якого мають місце різні визначення — через відношення напружень, коефіцієнтів інтенсивності тощо. Надалі, враховуючи малість зони передруйнування, нехтуємо залежністю  $\psi$  від  $r$  і вважаємо, що він дорівнює середньому значенню фазового кута напружень у зоні:  $\psi(r) \equiv \psi = \text{const}$ . Визначення кута  $\psi$ , як і довжини зони передруйнування  $l$ , здійснюється з умови відсутності сингулярності напружень у вершині зони, тоді як кут нахилу зони  $\beta$  буде визначено з умови максимуму величини дисипації енергії в зоні.

У кінці зони передруйнування реалізується асимптотика, яка відповідає сингулярній частині розв'язку однорідної крайової задачі про півнескінченну лінію розриву переміщень в однорідному ізотропному пружному матеріалі. Зокрема, для напружень мають місце асимптотики

$$\sigma_\theta(r, \beta) \sim \frac{k_1}{\sqrt{2\pi(r-l)}} \quad (r \rightarrow l+0), \quad \tau_{r\theta}(r, \beta) \sim \frac{k_2}{\sqrt{2\pi(r-l)}} \quad (r \rightarrow l+0), \quad (6)$$

де коефіцієнти інтенсивності напружень  $k_1, k_2$  у кінці лінії розриву підлягають визначенню в ході розв'язання задачі.

**Розв'язання задачі.** Застосувавши інтегральне перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (2, 3) та врахувавши умови (4) і (5), отримуємо векторне рівняння Вінера—Гопфа у смузі  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — достатньо малі додатні числа):

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = -\operatorname{tg} p\pi \mathbf{G}(p) \Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2), \quad (7)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, \beta) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, \beta) \end{pmatrix} \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \right\rangle \Big|_{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix}, \quad F_1(p) = \frac{\sigma_1 \cos \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i},$$

$$F_2(p) = \frac{\tau_1 \sin \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i};$$

$$\mathbf{G}(p) = \begin{pmatrix} G_{11}(p) & G_{12}(p) \\ G_{21}(p) & G_{22}(p) \end{pmatrix} = \frac{\cos p\pi}{D_0(-1-p) \sin p\pi} \begin{pmatrix} D_{11}(p) & 2D_{12}(p) \\ 2D_{21}(p) & -D_{22}(p) \end{pmatrix},$$

$$D_{11}(p) = \Delta_1 \Delta_{21} (1 + \kappa_1) [e(1 + \kappa_2) - (1 + \kappa_1)] - (\Delta_{21} \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_{51}) [e^2 (1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\alpha] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) (2\Delta_4 \Delta_{61} - \Delta_2 \Delta_{64}) + 4(e-1)(1 + \kappa_1) \Delta_1 (\Delta_4 \sin 2p\beta - \Delta_{21} \sin^2 p\beta),$$

$$D_{22}(p) = \Delta_1 \Delta_{22} (1 + \kappa_1) [e(1 + \kappa_2) - (1 + \kappa_1)] - (\Delta_{22} \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_{52}) [e^2 (1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\alpha] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) (2\Delta_4 \Delta_{62} - \Delta_{22} \Delta_{64}) - 4(e-1)(1 + \kappa_1) \Delta_1 (\Delta_4 \sin 2p\beta + \Delta_{22} \sin^2 p\beta),$$

$$D_{12}(p) = \Delta_1 \Delta_{41} [e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) - (1 + \kappa_1)^2] + (\Delta_{31} \Delta_4 - \Delta_{41} \Delta_3) [e^2 (1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\alpha] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) (\Delta_4 \Delta_{63} - \Delta_{41} \Delta_{64}) + 2(e-1)(1 + \kappa_1) \Delta_1 (\Delta_4 \cos 2p\beta + 2\Delta_{41} \sin^2 p\beta),$$

$$D_{21}(p) = \Delta_1 \Delta_{42} (1 + \kappa_1) [e(1 + \kappa_2) - (1 + \kappa_1)] + (\Delta_{32} \Delta_4 - \Delta_{42} \Delta_3) [e^2 (1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\alpha] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) (\Delta_4 \Delta_{65} - \Delta_{42} \Delta_{64}) +$$

$$\begin{aligned}
 &+2(e-1)(1+\kappa_1)\Delta_1(\Delta_4 \cos 2p\beta - 2\Delta_{42} \sin^2 p\beta), \\
 \Delta_1 &= p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_{21} = p \sin 2(\alpha + \beta) + \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta), \\
 \Delta_{22} &= p \sin 2(\alpha + \beta) - \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta), \\
 \Delta_3 &= p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \Delta_{31} = p \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \Delta_{32} = p \sin^2 \beta + \sin^2 p\beta, \\
 \Delta_4 &= p^2 \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta), \\
 \Delta_{41} &= p \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta), \\
 \Delta_{42} &= p \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta), \\
 \Delta_{51} &= p \sin 2\beta - \sin 2p\beta, \quad \Delta_{52} = p \sin 2\beta + \sin 2p\beta, \\
 \Delta_{61} &= p \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta), \\
 \Delta_{62} &= p \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta), \\
 \Delta_{63} &= p \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta), \\
 \Delta_{64} &= p^2 \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta), \\
 \Delta_{65} &= p \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) + \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta); \\
 e &= \frac{1+\nu_2 E_1}{1+\nu_1 E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.
 \end{aligned}$$

Для розв'язання рівняння (7) застосуємо наближений метод, використаний в [10]. У нульовому наближенні нехтуємо недіагональними компонентами матриці  $\mathbf{G}(p)$ , які в смузі  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$  виявляються значно меншими порівняно з діагональними компонентами. Тоді система (8) розщеплюється на два незалежних скалярних функціональних рівняння:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^{0+}(p) + \frac{\sigma_1 \cos \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} &= -\operatorname{tg} p\pi G_{11}(p) \Phi_1^{0-}(p), \\
 \Phi_2^{0+}(p) + \frac{\tau_1 \sin \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} &= -\operatorname{tg} p\pi G_{22}(p) \Phi_2^{0-}(p).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Точний аналітичний розв'язок рівнянь (8) був отриманий в [4, 5] і має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi_1^{0+}(p) &= -\frac{pG_{11}^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\sigma_1 \cos \psi}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_{11}^+(p)} + N_1(0) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{(p + \lambda_i + 1)} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_{11}^+(p)} + N_1(\lambda_i) \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi_1^{0-}(p) &= K^-(p) G_{11}^-(p) \left[ \frac{\sigma_1 \cos \psi N_1(0)}{(p+1)} - \sum_i \frac{C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_1(\lambda_i)}{(p + \lambda_i + 1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0); \\ \Phi_2^{0+}(p) &= -\frac{pG_{22}^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_1 \sin \psi}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_{22}^+(p)} + N_2(0) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{(p + \lambda_i + 1)} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_{22}^+(p)} + N_2(\lambda_i) \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi_2^{0-}(p) &= K^-(p) G_{22}^-(p) \left[ \frac{\tau_1 \sin \psi N_2(0)}{(p+1)} - \sum_i \frac{C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_2(\lambda_i)}{(p + \lambda_i + 1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0); \\ N_m(\lambda_i) &= \frac{K^+(-\lambda_i - 1)}{(\lambda_i + 1) G_{mm}^+(-\lambda_i - 1)} \quad (m = 1, 2), \end{aligned} \quad (9)$$

де використано подання

$$\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)} \quad (10)$$

( $\Gamma(z)$  — гамма-функція) і факторизацію скалярних коефіцієнтів рівнянь (8) за допомогою інтегралів типу Коші [11]:

$$\begin{aligned} G_{mm}(p) &= \frac{G_{mm}^+(p)}{G_{mm}^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \\ \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G_{mm}(z)}{z-p} dz \right] &= \begin{cases} G_{mm}^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G_{mm}^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

На наступному етапі розв'язання рівняння (8) враховуємо недіагональні компоненти матриці  $\mathbf{G}(p)$ . Для цього в доданках  $G_{mn}(p)\Phi_n^-(p)$  ( $m \neq n$ ) виконуємо заміни розшукуваних функцій  $\Phi_n^-(p)$  знайденим вище наближеним розв'язком  $\Phi_n^{0-}(p)$  і, використовуючи (10) і (11), отримуємо таку систему функціональних рівнянь на уявній осі  $\text{Re } p = 0$ :

$$\frac{\Phi_1^+(p)K^+(p)}{pG_{11}^+(p)} + \frac{K^+(p)}{pG_{11}^+(p)} \left[ \frac{\sigma_1 \cos \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} \right] + H_{12}(p) = -\frac{\Phi_1^-(p)}{K^-(p)G_{11}^-(p)},$$

$$\frac{\Phi_2^+(p)K^+(p)}{pG_{22}^{0+}(p)} + \frac{K^+(p)}{pG_{22}^+(p)} \left[ \frac{\tau_1 \sin \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} \right] + H_{21}(p) = -\frac{\Phi_2^-(p)}{K^-(p)G_{22}^-(p)},$$

де

$$H_{mn}(p) = \frac{\text{tg } p\pi K^+(p)G_{mn}(p)}{pG_{mm}^+(p)} \Phi_n^{0-}(p) \quad (m \neq n).$$

Розв'язуючи ці рівняння аналогічно розв'язанню подібних рівнянь у роботі [10], приходимо до розв'язку рівняння (7) у першому наближенні:

$$\Phi_m^+(p) = \Phi_m^{0+}(p) - \frac{pG_{mm}^+(p)}{K^+(p)} H_{mn}^+(p) \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$\Phi_m^-(p) = \Phi_m^{0-}(p) + K^-(p)G_{mm}^-(p)H_{mn}^-(p) \quad (\text{Re } p > 0), \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{H_{mn}(z)}{z-p} dz = \begin{cases} H_{mn}^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ H_{mn}^-(p), & \text{Re } p > 0; \end{cases} \quad m, n = 1, 2; \quad m \neq n.$$

**Визначення параметрів зони передруйнування.** Розв'язок (12) і асимптотики (6) після застосування до них теореми абелевого типу [11] приводять до асимптотик при  $p \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re } p < 0$ :

$$\Phi_1^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left[ \sigma_1 \cos \psi N_1(0) - \sum_i C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_1(\lambda_i) - \frac{\mathcal{H}_{12}}{2\pi} \right] = \frac{k_1}{\sqrt{-2pl}},$$

$$\Phi_2^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left[ \tau_1 \sin \psi N_2(0) - \sum_i C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_2(\lambda_i) - \frac{\mathcal{H}_{21}}{2\pi} \right] = \frac{k_2}{\sqrt{-2pl}},$$

де

$$\mathcal{H}_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{mn}(it) dt.$$

Покладаючи коефіцієнти інтенсивності  $k_1, k_2$  такими, що дорівнюють нулю внаслідок обмеженості напружень у кінці зони передруйнування, отримуємо такі рівняння для розрахунку довжини  $l$  зони передруйнування і фазового кута  $\psi$  напружень у ній:

$$\frac{\left(\sum_i C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_1(\lambda_i) + \frac{\mathcal{H}_{12}}{2\pi}\right)^2}{(\sigma_1 N_1(0))^2} + \frac{\left(\sum_i C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_2(\lambda_i) + \frac{\mathcal{H}_{21}}{2\pi}\right)^2}{(\tau_1 N_2(0))^2} = 1, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sigma_1 N_1(0)}{\tau_1 N_2(0)} \frac{2\pi \sum_i C_i F_2(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_2(\lambda_i) + \mathcal{H}_{21}}{2\pi \sum_i C_i F_1(\lambda_i, \beta) l^{\lambda_i} N_1(\lambda_i) + \mathcal{H}_{12}}. \quad (14)$$

Для знаходження кута нахилу  $\beta$  лінії розриву використовуємо умову максимуму величини дисипації енергії в зоні передруйнування, яка в рамках обраної моделі визначається рівністю [12]

$$D(\beta) = \sigma_1 \cos \psi \int_0^l \langle u_\theta(r, \beta) \rangle dr + \tau_1 \sin \psi \int_0^l \langle u_r(r, \beta) \rangle dr$$

і, з урахуванням визначення в (7) трансформант  $\Phi_{1(2)}^-(p)$ , дорівнює

$$D(\beta) = -\frac{4(1-v_1^2)}{E_1} l^2 \left\{ \sigma_1 \cos \psi \Phi_1^-(1) + \tau_1 \sin \psi \Phi_2^-(1) \right\}. \quad (15)$$

Отриманий вираз можна використати в енергетичному критерії зрушення тріщини, який формулюється як умова рівності швидкості вивільнення енергії її критичному значенню:  $\frac{dD}{dl} = G_c$ . Нехтуючи в (16) менш вираженою неявною залежністю трансформант  $\Phi_{1(2)}^-(1)$  від довжини зони  $l$ , отримуємо умову зрушення

$$\frac{dD}{dl} \approx -\frac{8(1-v_1^2)}{E_1} l \left\{ \sigma_1 \cos \psi \Phi_1^-(1) + \tau_1 \sin \psi \Phi_2^-(1) \right\} = G_c. \quad (16)$$

**Висновки.** Отриманий розв'язок має перспективи практичного використання для оцінки граничних навантажень кусково-однорідних тіл з ламаною межею поділу квазікрихких матеріалів за наявності міжфазної тріщини, що є актуальною проблемою механіки руйнування композитів з гранульованими наповнювачами, бетону, гірських порід тощо. Алгоритм використання передбачає задання зовнішнього навантаження за допомогою сталей  $C_p$ , які мають смисл узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вершини тріщини за відсутності зони передруйнування і мають бути заздалегідь



визначені для конкретного кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною за заданих умов навантаження шляхом розв'язання відповідної крайової задачі теорії пружності чисельними або, за можливості, аналітичними методами. Далі виконується розрахунок параметрів зони передруйнування (довжини і кута нахилу зони передруйнування, фазового кута напружень у зоні) та швидкості виділення енергії за формулами (13)—(16). Руйнівне навантаження встановлюється з досягненням виконання умови (16); відповідний кут нахилу зони передруйнування визначатиме напрямок повороту міжфазної тріщини. Обґрунтуванням перспектив використання розвинутої моделі можуть слугувати успішні передбачення кутів повороту міжфазної тріщини від плоскої межі поділу в рамках аналогічної моделі, описані в роботі [10].

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.* 1977. **13**, № 6. P. 763—773. <https://doi.org/10.1007/BF00034321>
2. Камінський А.О., Дудик М.В., Решітнік Ю.В. Про когезійну зону передруйнування біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу матеріалів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 4. С. 34—42. <https://doi.org/10.15407/dopovid2020.04.034>
3. Дудик М.В., Решітнік Ю.В., Феньків В.М. Асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів. *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-матем. науки.* 2020. № 1. С. 27—37. <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>
4. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2011. **47**, № 5. С. 53—59.
5. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження впливу пластичності матеріалів на міцність композитного з'єднання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2013. **56**, № 1. С. 71—83.
6. Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. Гранична рівновага кусково-однорідного тіла, послабленого міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці межі поділу. *Прикл. механіка.* 2022. **58**, № 5. С. 3—15.
7. Богданов В.Л., Кипніс А.Л. К исследованию разрушения полуограниченного тела при сжатии вдоль межфазной приповерхностной трещины. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2018. **61**, № 2. С. 91—99.
8. Камінський А.О., Дудик М.В., Решітнік Ю.В., Феньків В.М. Дослідження початкового етапу руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною при стисканні вздовж межі поділу. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2020. **63**, № 4. С. 109—121.
9. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S., Bastun V.N. On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2010. **34**. P. 345—355. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2010.01524.x>
10. Kaminsky A., Dudyk M., Reshitnyk Yu., Chornoivan Yu. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2023. **267**. 112117. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112117>
11. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Черепанов Г.П. К общей теории разрушения. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 1986. **22**, № 1. С. 36—44.

Надійшло до редакції 12.11.2024

## REFERENCES

1. Theocaris, P. S. & Gdoutos, E. E. (1977). Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.*, 13, No. 6, pp. 763-773. <https://doi.org/10.1007/BF00034321>
2. Kaminsky, A. A., Dudyk, M. V. & Reshitnyk, Y. V. (2020). About the cohesive pre-fracture zone at the tip of a crack outcoming from the corner point of the broken interface of materials. *Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr.*, No. 4, pp. 34-42 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.034>
3. Dudyk, M. V., Reshitnyk, Yu. V. & Fenkiv, V. M. (2020). Asymptotic analysis of the stress-strain state near the tip of the interphacial crack outcoming from angular point of the broken interphase. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*, No. 1, pp. 27-37 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>
4. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko, Yu. V. (2012). Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Mater. Sci.*, 47, No. 5, pp. 627-635. <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9437-6>
5. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko, Y. V. (2014). Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint. *J. Math. Sci.*, 201, No. 1, pp. 83-98. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1975-z>
6. Nazarenko, V. M. & Kipnis, O. L. (2022). Limiting equilibrium of a piecewise-homogeneous body with shear cracks at the corner point of the interface. *Int. Appl. Mech.*, 58, pp. 497-509. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01175-4>
7. Bogdanov, V. L. & Kipnis, A. L. (2021). Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. *J. Math. Sci.*, 253, pp. 99-107. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8>
8. Kamins'kyi, A. O., Dudyk, M. V., Reshitnyk, Yu. V. & Fen'kiv, V. M. (2023). Investigation of the initial stage of fracture of a piecewise homogeneous body with interface crack compressed along the interface. *J. Math. Sci.*, 273, pp. 1016-1030. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06561-4>
9. Kaminsky, A. A., Bogdanova, O. S. & Bastun, V. N. (2010). On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 34, pp. 345-355. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2010.01524.x>
10. Kaminsky, A., Dudyk, M., Reshitnyk, Yu. & Chornoivan, Yu. (2023). An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 267, 112117. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112117>
11. Noble, B. (1988). *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. 2nd ed. New York: Chelsea Pub Co.
12. Cherepanov, G. P. (1986). General theory of failure. *Mater. Sci.*, 22, pp. 32-39. <https://doi.org/10.1007/BF00720864>

Received 12.11.2024

O.S. Bogdanova<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0002-0397-6714>

M.V. Dudyk<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-1399-6367>

A.A. Kaminsky<sup>1</sup>, <https://orcid.org/0009-0000-9989-6887>

Y.V. Reshitnyk<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-7937-2880>

<sup>1</sup>S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup>Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine

E-mail: o.bogdanova@i.ua, dudyk\_m@hotmail.com, fract@inmech.kiev.ua, dikhtiarenko\_ju@udpu.edu.ua

MODEL OF THE PROCESS ZONE IN A QUASI-BRITTLE MATERIAL  
OF A BIMATERIAL BODY NEAR THE TIP OF AN INTERFACIAL CRACK  
AT THE CORNER POINT OF A BROKEN INTERFACE

A mathematical model of the process zone is developed, which under plane strain conditions is formed in a material with a quasi-brittle fracture mechanism near the apex of the interfacial crack at the corner point of the fractured interface. The process zone is modeled by a displacement discontinuity line on which the Mises—Hill strength condition is satisfied with the limit values of normal and tangential stresses in the quasi-brittle material as criterion parameters. The external load is taken into account by formulating the condition at infinity in the form of a requirement to cross-link the desired solution with the asymptotics of the known solution of a similar problem without a process zone. With the help of Mellin's integral transformation, the problem of calculating the parameters of the process zone is reduced to a vector functional equation for the transformants of stress components and displacement gradients. For its solution, an approximate method based on the stepwise partition of the original equation into a pair of independent scalar functional equations, which are solved using the Wiener—Hopf method, is used. From the found approximate solution of the functional equation of the problem, a closed system of transcendental equations and relations for calculating the length of the process zone, the phase angle of stresses and the value of energy dissipation in the zone is obtained. The angle of inclination of the zone to the interface is determined from the condition of the maximum value of energy dissipation. An expression for the rate of energy dissipation in the zone is obtained, which provides the application of the energy criterion for estimating the ultimate load preceding crack nucleation in the direction determined by the orientation of the process zone at the time of nucleation.

**Keywords:** *interfacial crack, broken interface, process zone, strength criterion of Mises—Hill.*