УДК 517.946

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Качественные свойства решений одного класса эволюционных систем

Исследуются нелинейные нестационарные системы, которые используются в качестве приближения к известной модели Бина теории сверхпроводимости II в трехмерном случае. Также рассматривается аналогичная система, но с конвекцией, которая играет роль демпфирования. С этими системами тесно связана система уравнений пористой среды. Изучены свойства финитности носителя решения задачи Коши для нелинейных нестационарных систем в пространстве.

1. В данной работе изучается задача Коши для следующей вырождающейся квазилинейной системы уравнений относительно неизвестной вектор-функции $H(x,t) = (H_1(x,t),\ H_2(x,t), H_3(x,t))$:

$$H_t + \nabla \times [|\nabla \times H|^{P-2} \nabla \times H] = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot H = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$H(x,0) = H_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Здесь $Q = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, $p > 2$ — заданная постоянная; $F(x,t)$ и $H_0(x)$ — заданные вектор-функции. Для вектор-функции $A(x)$ символ $\nabla \times A$ означает $\operatorname{rot} A$, т. е. векторное произведение векторов $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ и $A(x)$, символ $\nabla \cdot A$ — скалярное произведение векторов ∇ и $A(x)$, т. е. $\nabla \cdot A = \operatorname{div} A$, $|A|$ — длину вектора A.

Система уравнений (1)–(3) обычно используется как модель С. П. Бина для сверхпроводимости типа II [1, 2]. Отметим, что по самой постановке указанная модель подразумевает решение с компактным носителем. Поэтому, естественно, возникает вопрос об установлении компактности носителя решения задачи (1)–(3) при финитных функциях $H_0(x)$ и $F(x,t)$.

В настоящее время такая финитность была установлена в работе [1] при существенном ограничении, состоящем в предположении двумерности задачи (1)–(3). А именно, в предположении, что неизвестное поле H в задаче (1)–(3) является плоским и зависит только от двух переменных x_1 и x_2, т. е. $H = (H_1(x_1,x_2,t), H_2(x_1,x_2,t), 0)$.

Слабым решением задачи (1)–(3) будем называть вектор-функцию $\vec{H}(x,t) \in L_2(0,T; W_p^1(\mathbb{R}^3))$ $\forall\, T > 0$ такую, что $\nabla \cdot H(x,t) = 0$ почти всюду в Q, и выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\vec{H}\vec{\Phi}_t + |\nabla \times \vec{H}|^{p-2} (\nabla \times \vec{H})(\nabla \times \vec{\Phi})]\, dxdt = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \vec{H}_0(x) \vec{\Phi}(x,0)\, dx \tag{4}$$

для всякой финитной по переменной x вектор-функции $\vec{\Phi}(x,t) \in W_2^1(0,T; W_p^1(\mathbb{R}^3))$ такой, что $\nabla \cdot \vec{\Phi}(x,t) = 0$ почти всюду и $\vec{\Phi}(x,T) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$. Известно, что существует единственная функция из $L_2(0,T;W_p^1(\mathbb{R}^3))$, являющаяся решением задачи (1)–(3) в смысле (4), и такая, что носитель функции $\vec{H}(\cdot,t)$ имеет свойство

$$\sup(\vec{H}(\cdot,t)) \subset \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < \max\{4f(t), \subset (\vec{H}_0,\vec{F})t^{2/k}\}\},$$

где $k = 3(p-2)+2p$; $f(t)$ — точный размер носителей функций $\vec{H}$ и $\vec{F}$ [3].

2. В скалярном случае система (1) является прототипом уравнения

$$U_t = \operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2}\nabla U). \tag{5}$$

Уравнение (5) относится к классу вырождающихся параболических уравнений и достаточно хорошо изучено в [3–5]. В частности, если $p > 2$, то $U(x,t)$ обладает свойствами конечной скорости распространения возмущений, т. е., если в какой-то момент времени t_0 решение $U(x,t_0)$ равно нулю в шаре радиусом R_0, то $U(x,t) = 0$ для почти всех $x \in B_{R_0+Ct^\beta}$, где $\beta = 1/N(p-2)+p$ — показатель Баренблатта, а $B_r(x_0)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиусом $r > 0$ с центром в точке x_0.

Впервые свойство финитности носителя, или, иначе, свойство конечной скорости распространения возмущений, было обнаружено в работе [6], где найдены автомодельные решения для вырождающихся параболических уравнений. Для уравнения (5) соответствующее решение имеет вид

$$\mathrm{E}(x,t) = t^{-n/\beta}\left[C - \frac{p-2}{p}\beta^{-1/(p-1)}\left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}}\right)^{p/(p-1)}\right]^{(p-1)/(p-2)}, \tag{6}$$

а для уравнения пористой среды —

$$U_t = \Delta U^m, \tag{7}$$

$$\mathrm{E}(x,t) = t^{-n/\beta}\left[C - \frac{m-1}{2}\beta^{-1}\left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}}\right)^2\right]^{1/(m-1)}, \tag{8}$$

где $\beta = n(m-1)+2$; C — постоянная.

Из формул (6) и (8) видно, что носители этих решений содержатся в шарах радиусов $R_1 = C_1 t^{1/(n(p-2)+p)}$ и $R_2 = C_2 t^{1/(n(m-1)+2)}$ соответственно.

3. Рассмотрим задачу Коши для вырожденной квазилинейной системы уравнений типа модели Бина с конвекцией

$$\begin{gathered}\vec{H}_t + \nabla\times[|\nabla\times\vec{H}|^{p-2}\nabla\times\vec{H}] + \frac{2ax}{1+|x|^2}\times[|\nabla\times\vec{H}|^{p-2}\nabla\times\vec{H}] = 0,\\ (x,t)\in Q_T = \mathbb{R}^3\times(0,T), \qquad a>0, \qquad T>0, \qquad p>2,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = 0, \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$\vec{H}(x,0) = \vec{H}_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^3, \tag{11}$$

а также задачу Коши для вырожденного параболического уравнения

$$U_t = \operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) + p\nabla\Theta\cdot\nabla U|U|^{p-2}, \tag{12}$$

$$(x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T), \qquad n \geqslant 1, \qquad p > 2,$$
$$\Theta(x) = |x|^\gamma, \qquad \gamma > 1, \qquad U(x,0) = U_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Уравнение (12) есть нестационарное уравнение с p-лапласианом и конвективным членом. Обозначим через $\vec{H}_0(x)$ измеримую финитную вектор-функцию, которая удовлетворяет условиям

$$\nabla \cdot \vec{H}_0 = 0, \qquad (1+|x|^2)^a |\nabla \times H_0(x)| \in L_p(\mathbb{R}^3),$$
$$|\nabla \times [(1+|x|^2)^a |\nabla \times \vec{H}_0|^{p-2} \nabla \vec{H}_0]| \in L_2(\mathbb{R}^3).$$

Затем обозначим через $W^1_{p,a}(\mathbb{R}^3)$ взвешенное пространство Соболева с конечной нормой

$$\|f\|_{W^1_{p,a}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^a (|f|^p + |\nabla f|^p dx) \right)^{1/p}.$$

Вектор-функция $\vec{H}(x,t)$ называется слабым решением задачи (9)–(11), если $\vec{H}(x,t) \in \in L_2(0,T; W^1_{p,a}(\mathbb{R}^3))$ $\nabla T > 0$, $\nabla \cdot \vec{H}(x,t) = 0$ почти всегда на Q_T, и выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} [-(1+|x|^2)^a \vec{H} \vec{\Phi}_t + (1+|x|^2)^a |\nabla \times \vec{H}|^{p-2} (\nabla \times \vec{H})(\nabla \times \vec{\Phi})]\, dxdt =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^a \vec{H}_0(x) \vec{\Phi}(x,0)\, dx$$

для всякой финитной по переменной x вектор-функции $\vec{\Phi}(x,t) \in W^1_2(0,T; W^1_{p,a}(\mathbb{R}^3))$ такой, что $\nabla \vec{\Phi}(x,t) = 0$ почти всюду и $\vec{\Phi}(x,t) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, слабым решением задачи (12), (13) называется функция $U(x) \in L_2(0,T, W^1_{pW(x)}(\mathbb{R}^n))$ $\forall T > 0$ такая, что удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} [-W(x) U \varphi_t + W(x) |\nabla U|^{p-2} \nabla U \nabla \varphi]\, dxdt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x, U_0(x, \varphi(x,0)))\, dx,$$

для всякой финитной по переменной x функции $\varphi(x,t) \in W^1_2(0,T; W^1_p(\mathbb{R}^n))$, $\varphi(x,T) = 0$ в $\mathbb{R}^n$.

Для задач (9)–(11) и (12), (13) справедливы соответственно следующие размеры носителя [7]:

$$\operatorname{supp}(\vec{H}(x,t)) \subset B_{\overline{R}(t)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < \overline{R}(t)\},$$
$$\operatorname{supp}(u(x,t)) \subset B_{\overline{\overline{R}}(t)} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < \overline{\overline{R}}(t)\},$$

где

$$\overline{\overline{R}}(t) = [\ln t]^{1/\gamma}, \qquad \text{а} \qquad \overline{R}(t) = 4R_0 + C\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^a |\nabla \times \vec{H}_0|^p dx \right]^{(p-2)/k} t^{2/k},$$

$$k = (3+2a)(p-2) + 2p, \qquad \operatorname{supp} \vec{H} \in B_{R_0} = \{|x| < R_0\}.$$

4. Пусть G — заданная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, Γ — ее граница, и пусть $D_T = G \times (0,T)$, $S = \Gamma \times [0,T]$, где $0 \leqslant t \leqslant T$ — заданный отрезок времени. Пусть далее Z — равномерно-эллиптический оператор

$$Zu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - qu, \qquad \beta_1\lambda^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\lambda_i\lambda_j \leqslant \beta_2\lambda^2$$

$\forall\,\lambda \in E^n$ всюду в D_T (β_1 и β_2 — фиксированные числа), заданный на элементах U из банахова пространства $V(D_T)$ с нормой

$$\|f\|_{V(D_T)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|f(x,t)\|_{L^2(G)} + \|f_x\|_{L^2(D_T)}.$$

Относительно коэффициентов $k_{i,j}(x,t)$, $i,j = 1,2,\ldots n$, $q(x,t)$, предположим, что они являются элементами пространства $L^\infty(D_T)$, причем $q(x,t) \geqslant \beta_1$ всюду в D_T.

Введем множество $U = \{p\colon p \in L^2(S),\ -1 \leqslant p(x,t) \leqslant 1,\ \forall\,(x,t) \in S\}$, элементы которого будем называть управлениями.

Рассмотрим систему, состояние которой описывается функцией $u(x,t) \in V(D_T)$, являющейся решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Zu + f \quad \text{в} \quad D_T, \quad u(x,0) = F(x) \quad \text{в} \quad G, \quad \frac{\partial u}{\partial n_Z} + h(u-p) = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{14}$$

Здесь функции $f(x,t)$ и $F(x)$ соответственно элементы пространств $V(D_T)$ и $L^2(G)$, а функцию h будем считать постоянной (хотя это условие необязательно). Решением задачи (14) назовем функцию $u(x,t) \in V(D_T)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{D_T} u\Psi_t dxdt + \int\limits_{D_T} \sum_{i,j=1}^{n} k_{i,j}u_{x,j}\Psi_{xi}dxdt + \int\limits_{D_T} qu\Psi dxdt =$$

$$= \int\limits_{D_T} f\Psi dxdt + \int\limits_{S} h(u-p)\Psi dS + \int\limits_{G} F(x)\Psi(0,x)\,dx \qquad \forall\,\Psi(x,t) \in W_2^1(D_T). \tag{15}$$

Решение последней задачи (15) существует и единственно и считается эквивалентным решению задачи (14) [8].

Пусть $u_1 = R(x)$ — заданный элемент пространства $L^2(G)$. Предположим, что система управляема относительно u_1, т. е. существует такое управление $\widetilde{p} \in U$, что

$$u(x,t_1,\widetilde{p}) = R(x) \tag{16}$$

для некоторого $t_1 \in [0,T]$, где $u(x,t_1,\widetilde{p})$ — решение задачи (14). Справедливы следующие утверждения [8].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (14)–(16)*, тогда существует оптимальное в смысле быстродействия управление* $p = p^*(S) \in U$.

Теорема 2. *Пусть система* (14) *управляема и пусть*

$$U = \{p\colon p \in L^2(\Gamma); p(t,+\varphi) = p(t,-\varphi), p \in C^2[0,2\pi]\colon |p| \leqslant 1\ \forall\,(t,\varphi) \in \Gamma\}.$$

Тогда существует оптимальное управление $p(t, \varphi)$ *и оно имеет вид*

$$p(t,\phi) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}\left[\sum_{\eta=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{c\rho}\lambda_{0\rho}^2 t\right) l_\eta\right] + \frac{3}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\operatorname{sign}\left[\sum_{\eta=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{c\rho}\lambda_{m\eta}^2 t\right) l_\eta\right]\cos m\phi,$$

где l_η *— некоторые постоянные [8].*

1. *Yin H. M.* On a p-Laplacian type of evolution system and applications the Bean model in type-II superconductivy theory // Quarterly of Appl. Math. – 2001. – **59**, No 1. – P. 47–66.
2. *Yin H. M., Li B. Q., Zon J.* A degenerate evolution system modeling Bean's critical-state type-II superconductivy // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2002. – **8**, No 3. – P. 781–794.
3. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Усп. мат. наук. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
4. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations. – Berlin: Springer, 1993. – 393 p.
5. *Antontsev S. N., Dias J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for the free boundary problems // Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. – Boston: Birkhäuser, 2002. – 333 p.
6. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. мех. – 1952. – **16**, № 1. – С. 67–78.
7. *Дегтярев С. П., Саникидзе Т. А., Тедеев А. Ф.* О компактности носителя решения одной эволюционной системы, возникающей из модели Бина в теории сверхпроводимости // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 7–13.
8. *Миненко А. С.* О построении оптимального управления в смысле быстродействия в одной параболической системе // Материалы научного семинара по теории оптимальных процессов. Научный совет по кибернетике АН УССР. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1973. – Вып. 1. – С. 3–14.

Донецкий национальный технический университет
Поступило в редакцию 26.06.2014

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Якісні властивості розв'язків одного класу еволюційних систем

Досліджується нелінійні нестаціонарні системи, що використовуються як наближення до відомої моделі Біна теорії надпровідності II у просторовому випадку. Також розглядається аналогічна система, але з конвекцією, що відіграє роль демпфування. З цими системами тісно пов'язана система рівнянь пористого середовища. Встановлено властивість фінітності носія розв'язку задачі Коші для нелінійних нестаціонарних систем у тривимірному випадку.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Qualitative properties of solutions of one class of evolutionary systems

The nonlinear nonstationary systems used as approximations to the well-known Bean model in the theory of type-II superconductivity in the 3D case are studied. An analogous system with convection term playing the role of damping is considered as well. These systems are closely related to the system of equations for a porous medium. The finiteness of the carrier of a solution of the Cauchy problem for nonlinear nonstationary systems in the 3D case is established.