Доповіді НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

1 • 2015

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай**

Інтерлінація функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих із збереженням класу диференційовності

Пропонується метод побудови операторів інтерлінації ермітового типу функцій трьох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних на вказаних лініях у циліндричній системі координат. Метод дозволяє відновлювати ці функції у точках між заданою системою замкнутих неперетинних кривих у циліндричній системі координат, зберігаючи автоматично клас диференційовності, якому належить наближувана функція.

В задачах конструювання поверхонь або в задачах відновлення просторового розподілу деяких характеристик тіла з потрібними властивостями виникають ситуації, коли інформація про поверхню або про досліджувану характеристику задається точками на системі просторових неперетинних або перетинних ліній і при цьому математична модель поверхні $r = f(\varphi, z)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a \leqslant z \leqslant b$ або функція $u = f(r, \varphi, z)$, $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a \leqslant z \leqslant b$, що описує вказану характеристику в циліндричній системі координат, повинна задовольняти деяку множину вимог. Серед цих вимог відмітимо:

належність функцій, що беруть участь в описі поверхні до потрібного класу диференційовності у всій області задання змінних або у деяких її підобластях;

належність деяких (або всіх) заданих точок конструйованій поверхні;

належність частин деяких відомих ліній конструйованій поверхні;

функція $r = f(\varphi, z)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a \leqslant z \leqslant b$ повинна мати задані значення проекцій криволінійних інтегралів 1-го роду вздовж заданої системи ліній;

належність деяких відомих поверхонь конструйованій поверхні;

збереження ізогеометричних властивостей конструйованою поверхнею, зокрема, збереження опуклості, вгнутості в деяких підобластях області задання параметрів, збереження поведінки градієнта в деяких підобластях області задання параметрів тощо.

Відзначимо, що одночасне задоволення всіх вимог є дуже складною задачею, яка на даний час не розв'язана повністю. Тому актуальною є тема даної роботи, присвяченої побудові функцій $u(x, y, z)$ із заданими слідами на довільній системі замкнутих неперетинних кривих у циліндричній системі координат та побудові з їх допомогою математичних моделей поверхонь, заданих дискретними наборами точок на вказаних кривих.

Постановка задачі. Вважаємо відомими: систему кривих, заданих параметрично,

$$\Gamma_k\colon \{(x,y,z)\colon x = r_k(\varphi)\cos\varphi, y = r_k(\varphi)\sin\varphi, z = z_k(\varphi), 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}, \qquad k = \overline{1, M},$$
$$z_1(\varphi) < z_2(\varphi) < \cdots < z_M(\varphi), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

та систему слідів функції $f(r, \varphi, z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ і її частинних похідних

$$D^s f|_{\Gamma_k} = \frac{\partial^{|s|} f(r,\varphi,z)}{\partial r^{s_1}\partial z^{s_2}}\bigg|_{\substack{r=r_k(\varphi),\\ z=z_k(\varphi)}} = f_{k,s}(\varphi), \quad s = (s_1, s_2), \quad |s| = s_1 + s_2; \quad |s| = \overline{0, N},$$

де $u(x, y, z) \in C^{\nu}(\mathbb{R}^3)$, $\nu \geqslant N$, — деяка ν разів неперервно диференційовна функція, взагалі кажучи, невідома. Необхідно побудувати за допомогою цієї інформації оператор інтерлінації $E_{MN} f(r, \varphi, z)$, що зберігає клас диференційовності, якому належить наближувана функція $f(r, \varphi, z)$ і дозволить обчислювати наближено $f(r, \varphi, z)$ у довільній точці (r, φ, z) між вказаними лініями.

Аналіз літературних джерел. Задача інтерлінації функцій двох і більше змінних виникає при необхідності відновлювати ці функції у точках між заданою системою ліній за допомогою їх слідів та слідів їх нормальних похідних (або інших операторів) на вказаних лініях. Вона є невід'ємною частиною формулювання крайових задач для плоских областей складної форми, границя яких складається з об'єднання кількох відомих ліній і є невід'ємною частиною побудови координатних функцій у варіаційних та проекційних методах розв'язання крайових задач для областей складної форми. Оператори інтерлінації функцій, які є природними узагальненнями операторів інтерполяції, досліджувалися в роботах [1–5], звідки випливає, що сформульована задача розв'язана для випадку системи неперетинних кривих і перетинних прямих у декартовій системі координат та на системі замкнутих ліній в циліндричній системі координат, що лежать на горизонтальних площинах $z = z_k$, $k = \overline{1, M}$. Побудова операторів $E_{MN} f(r, \varphi, z)$ інтерлінації функцій $f(r, \varphi, z)$ на довільній системі замкнутих неперетинних кривих у циліндричній системі координат досліджується в даній роботі вперше і використовує методи, розвинуті в [6, 7].

Основні твердження роботи. Вважаємо, що функція (взагалі кажучи, невідома) $f(r, \varphi, z) \in C^{\nu}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, задається на системі неперетинних замкнутих кривих $\Gamma_k = \{(r, \varphi, z)\colon r = r_k(\varphi) \in C^N[0, 2\pi],\ z = z_k(\varphi) \in C^N[0, 2\pi]\}$, $k = \overline{1, M}$, своїми слідами та слідами своїх похідних $f_{k,s}(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$; $s = (s_1, s_2)$, $|s| = s_1 + s_2$; $|s| = \overline{0, N}$.

Введемо позначення: $g_k(r, \varphi, z, \beta_1, \beta_2) = \varphi + \beta_1(r - r_k(\varphi)) + \beta_2(z - z_k(\varphi))$. Врахуємо, що $g_k(r_k(\varphi), \varphi, z_k(\varphi), \beta_1, \beta_2) = \varphi$; $g_k(r_l(\varphi), \varphi, z_l(\varphi), \beta_1, \beta_2) = \varphi + \beta_1(r_l(\varphi) - r_k(\varphi)) + \beta_2(z_l(\varphi) - z_k(\varphi))$.

Введемо до розгляду систему функцій $h_{k,s}(r, \varphi, z)$, $G_{s_1}(\beta_1)$, $K_{s_2}(\beta_2)$, $k = \overline{1, M}$; $s_1, s_2 = \overline{0, N}$ з властивостями

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} h_{k,s}(r, \varphi, z)\bigg|_{\Gamma_l} = \delta_{k,l}\delta_{p,N-s_1}\delta_{q,N-s_2}; \qquad k, l = \overline{1, M}; \qquad p + q, s_1 + s_2 = \overline{0, N}, \quad (1)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\beta_1^{m_1}\,d\beta_1 = \delta_{0,m_1}; \qquad s_1, m_1 = \overline{0,N};$$
$$\int\limits_0^{1} K_{s_2}(\beta_2)\beta_2^{m_2}\,d\beta_2 = \delta_{0,m_2}; \qquad s_2, m_2 = \overline{0,N}. \tag{2}$$

Пропонується такий вигляд шуканого оператора інтерлінації:

$$E_{M,N}f(r,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0,0}(r,\varphi,z)\int\limits_0^{2\pi} G_0(\beta_1)\int\limits_0^{1} K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))\,d\beta_1 d\beta_2 +$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=1}^{N} h_{k,s}(r,\varphi,z)\int\limits_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\int\limits_0^{1} K_{s_2}(\beta_2)\times$$
$$\times \int\limits_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}\,du\,d\beta_1 d\beta_2.$$

Теорема 1. *Якщо* $f_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-|s|}[0,2\pi]$, $|s| = s_1 + s_2 = \overline{0,N}$, $N \leqslant \nu$, *то* $\forall\, \beta_1 \in [0,2\pi]$, $\beta_2 \in [0,1]$,

$$U_{k,0,0}(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2) = f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)) \in C^{\nu}(D),\ \ D = \mathbb{R}_+\times[0,2\pi]\times\mathbb{R};\ \ \mathbb{R}_+ = [0,\infty),$$
$$U_{k,s}(r,\varphi,z) = \int\limits_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}\,du \in C^{\nu}(D).$$

Теорема 2. *Якщо виконуються співвідношення* (1), (2), *то функції*

$$V_{k,0,0}(r,\varphi,z) = \int\limits_0^{2\pi} G_0(\beta_1)\int\limits_0^{1} K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))\,d\beta_1 d\beta_2 \in C^{\nu}(D),$$
$$V_{k,s}(r,\varphi,z) = \int\limits_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\int\limits_0^{1} K_{s_2}(\beta_2)\int\limits_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}\,du\,d\beta_1 d\beta_2$$

мають властивості

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} V_{k,0,0}(r,\varphi,z)\bigg|_{\Gamma_k} = \begin{cases} f_{k,0,0}(\varphi), & p = 0, \quad q = 0, \\ 0, & 1 \leqslant p+q \leqslant N, \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} V_{k,s}(r,\varphi,z)\Big|_{\Gamma_k} =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant s_1 - 1; \quad 0 \leqslant q \leqslant s_2 - 1, \\ f_{k,s}(\varphi), \quad p = s_1, \quad q = s_2, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1) \int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\, \frac{\partial^{p-s_1+q-s_2}}{\partial r^{p-s_1} \partial z^{q-s_2}} f_{k,s}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)) d\beta_1 d\beta_2 \Big|_{\Gamma_k} = 0, \\ s_1 < p \leqslant N, \quad s_2 < q \leqslant N; \quad p+q, \quad s_1+s_2 \leqslant N. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* (1), (2), *то оператор* $E_{M,N} f(r,\varphi,z)$ *задовольняє умови*

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} E_{M,N} f(r,\varphi,z)\Big|_{\Gamma_l} = f_{l,p,q}(\varphi), \qquad l = \overline{1,M}, \qquad p+q = \overline{0,N}; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{5}$$

Теорема 4. *Функції* $h_{k,s}(r,\varphi,z)$ *можна подати у вигляді*

$$h_{k,s}(r,\varphi,z) = s_{N,k,s_1}(r,\varphi) s_{N,k,s_2}(z,\varphi),$$

де $s_{N,k,s_1}(r,\varphi) \in C^\nu[\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]]$, $s_{N,k,s_2}(z,\varphi) \in C^\nu[\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]]$ *— базисні сплайни степеня* $N+1$ *з властивостями*

$$\frac{\partial^p s_{N,k,s_1}}{\partial r^p}(r_l,\varphi) = \delta_{k,l}\delta_{p,s_1}; \qquad k,l = \overline{0,M}; \qquad p, s_1 = \overline{0,N};$$

$$\frac{\partial^q s_{N,k,s_2}}{\partial z^q}(z_l,\varphi) = \delta_{k,l}\delta_{q,s_2}; \qquad k,l = \overline{0,M}; \qquad q, s_2 = \overline{0,N}.$$

Таким чином, у роботі запропоновано формули для операторів інтерлінації функцій трьох змінних у циліндричній системі координат $Or\varphi z$, заданих своїми слідами і слідами своїх похідних за змінними r і z на системі неперетинних ліній в параметричній формі.

Відмітимо основні властивості запропонованого в даній роботі методу:

1) оператор $E_{M,N} f(r,\varphi,z)$ має властивості $E_{M,N} f(r,\varphi,z) \in C^\nu(D)$ та (5), навіть якщо $f_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-|s|}[0,2\pi]$, $|s| = \overline{0,N}$, $N \leqslant \nu$ і $f_{k,s}(\varphi)$ не належать класу $C^\nu[0,2\pi]$;

2) метод дозволяє використовувати замість слідів $f_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-|s|}[0,2\pi]$, $|s| = \overline{0,N}$, $N \leqslant \nu$ їх наближення інтерполяційними сплайнами, побудовані на основі використання дискретних наборів значень $f_{k,s}(\varphi_j)$, $k = \overline{1,M}$, $|s| = \overline{0,N}$, $N \leqslant \nu$; $j = \overline{1,N}$; зауважимо, що метод можна узагальнити на випадок, коли замість слідів використовуються також апроксимаційні сплайни.

Тому в подальшому автори планують присвятити окрему публікацію щодо побудови операторів інтерполяції функцій трьох змінних, оснований на операторах інтерлінації $E_{M,N} f(r,\varphi,z)$, приділяючи особливу увагу випадку, коли лінії інтерлінації задаються дискретними наборами точок, а не формулами. Така постановка задачі виникає, зокрема, в машинобудуванні при конструюванні поверхонь пера лопатки компресорів авіадвигунів.

1. *Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. – Київ: Наук. думка, 2012. – 404 с.
2. *Литвин О. М.* Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в $\mathbb{R}^n$ // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 7. – С. 15–19.

3. *Литвин О. М.* Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i-0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = g(x,t)$ // Там само. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
4. *Литвин О. М.* Побудова функцій n змінних із заданими нормальними похідними на $\mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^n)$ // Там само. – 1987. – № 5. – С. 13–17.
5. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л.* Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 45–50.
7. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л.* Ермітова інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(R^2)$ // Там само. – 2014. – № 4. – С. 35–39.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
ДП "Івченко-Прогрес", Запоріжжя

Надійшло до редакції 25.12.2014

Академик НАН Ураины **И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, А. В. Ткаченко, О. Л. Грицай**

Интерлинация функций трех переменных на системе непересекающихся кривых с сохранением класса дифференцируемости

Предлагается метод построения операторов интерлинации эрмитового типа функций трех переменных с помощью их следов и следов их производных на заданных линиях. Метод позволяет восстанавливать эти функции в точках между заданной системой замкнутых непересекающихся кривых в цилиндрической системе координат, сохраняя автоматически класс дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция.

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. N. Lytvyn, O. O. Lytvyn, A. V. Tkachenko, O. L. Gritcai**

Interlineation of the functions of the three variables on a system of disjoint lines preserving the differentiability class

A method of construction of Hermitian-type operators of interlineation of the functions of three variables with help of traces and traces of derivatives on the given lines is proposed. The method can recover these functions at points between the given system of closed disjoint lines in a cylindrical coordinate system, automatically preserving the differentiability class of an approximated function.