

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.029>

УДК 539.375

Член-корреспондент НАН Украины **В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

## **Концентрация напряжений вблизи угловой точки границы раздела сред при наличии исходящих из нее маломасштабных межфазных сдвиговых трещин**

*Рассмотрена симметричная задача механики разрушения композитных материалов об упругом равновесии кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей межфазные линии разрыва касательного смещения в угловой точке. Методом Винера – Хопфа построено точное решение задачи. На основе этого решения исследовано поведение напряжений вблизи угловой точки границы раздела сред при наличии исходящих из нее маломасштабных сдвиговых трещин.*

**Ключевые слова:** механика разрушения композитных материалов, угловая точка, межфазная сдвиговая трещина, концентрация напряжений, метод Винера–Хопфа.

Остроконечные концентраторы напряжений в деформируемых твердых телах чрезвычайно опасны с той точки зрения, что именно в их окрестностях следует ожидать начала разрушения прежде всего. В соответствующей статической задаче теории упругости при приближении точки тела к такому концентратору напряжения стремятся к бесконечности. Вследствие высокой концентрации напряжений возможны разрыв сплошности вблизи концентратора и зарождение исходящих из него трещин, длины которых в значительной степени меньше размеров тела (маломасштабные трещины). Если зародившаяся трещина окажется неустойчивой, то по достижении состояния предельного равновесия режим ее развития будет динамическим, что может привести к непредвиденному катастрофическому разрушению конструкции. Поэтому актуальной проблемой механики разрушения является исследование задач теории упругости о трещинах, исходящих из угловых точек — остроконечных концентраторов напряжений. Решенные к настоящему времени задачи механики разрушения данного класса относятся к случаям, когда рассматриваемые тела с трещинами в угловых точках однородны. При этом исследовались, в основном, задачи для тел клиновидной конфигурации [1–6]. Угловые точки кусочно-однородных тел в этом плане не изучались.

© В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис, 2016

ISSN 1025-6415. Доп. НАН України. 2016. № 12

29

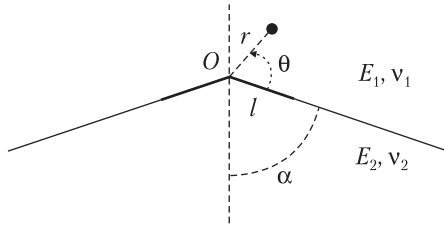


Рис. 1

точку — остроконечный концентратор напряжений. Из угловой точки границы раздела сред исходят межфазные сдвиговые трещины, длины которых в значительной степени меньше размеров тела. Предполагается, что трение между берегами трещин отсутствует. Задача считается симметричной относительно биссектрисы углов.

Целью данной работы является анализ поведения напряжений вблизи рассматриваемой угловой точки при наличии трещин.

С учетом малости трещин приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рис.1). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале  $]-1; 0[$  корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная  $C$ , входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи (см. рис. 1) имеют следующий вид:

$$\theta = \pi - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = -\alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cgr^\lambda + o(1/r). \quad (3)$$

Здесь  $-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ ;  $\langle a \rangle$  — скачок  $a$ ;  $g(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$  ( $e_0 = E_1 / E_2$ ) — известная функция;  $E_1, E_2$  — модули Юнга;  $\nu_1, \nu_2$  — коэффициенты Пуассона;  $\lambda$  — единственный на интервале  $]-1; 0[$  корень уравнения

$$\Delta(-x-1) = 0, \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2,$$

$$\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha],$$

$$\delta_1(z) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$$

Функция  $g$  выражается формулой

$$g = \lambda g_1 \sin \lambda \alpha - g_2 \sin(\lambda + 2)\alpha,$$

Ниже проведено исследование поведения напряжений вблизи угловой точки границы раздела сред при наличии исходящих из нее маломасштабных межфазных сдвиговых трещин.

В условиях плоской деформации в рамках статической задачи рассмотрим кусочно-однородное тело, составленное из изотропных упругих частей. Граница раздела сред не является гладкой, а содержит угловую

$$g_1 = (1-e)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda+2)\alpha - (1-\varepsilon_1 - 2e)\lambda \sin 2\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \times \\ \times \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + [2-(1-\varepsilon_2)e]\lambda \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \times \\ \times \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha - 2[1-\varepsilon_1 - (1-\varepsilon_2)e] \cos \lambda \alpha \sin(\lambda+2)\alpha \times \\ \times \cos(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + (1+\varepsilon_1)\lambda \sin 2\alpha \times \\ \times \sin(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + (1+\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) \times \\ \times \cos \lambda \alpha \sin^2(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] - (1+\varepsilon_2) \times \\ \times \lambda \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha + (1-\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \cos \lambda \alpha \times \\ \times \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha];$$

$$g_2 = (1-e)(1-\varepsilon_2 + \lambda)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda \alpha - (1-\varepsilon_1 - 2e)\lambda(1-\varepsilon_2 + \lambda) \times \\ \times \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + [2-(1-\varepsilon_2)e]\lambda \times \\ \times (1-\varepsilon_2 + \lambda) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda \alpha \sin(\lambda+2)\alpha - 2[1-\varepsilon_1 - (1-\varepsilon_2)e] \times \\ \times (1-\varepsilon_2 + \lambda) \cos^2 \lambda \alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\ + (1+\varepsilon_1)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin \lambda \alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + (1+\varepsilon_1) \times \\ \times (1-\varepsilon_2)\lambda \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] - \\ - (1+\varepsilon_2)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin \lambda \alpha \cos \lambda \alpha \cos(\lambda+2)\alpha + (1-\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\lambda \times \\ \times \sin \lambda \alpha \cos \lambda \alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos \lambda(\pi-\alpha) \sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha].$$

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая (задача 1) отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = -Cgr^\lambda, \quad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как  $o(1/r)$  (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Среди методов решения задач механики разрушения, применяемых в настоящее время [7–11], одним из эффективных является метод Винера — Хопфа. Для построения точного решения первой задачи будем использовать метод Винера — Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [12, 13].

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p+\lambda+1} = A \operatorname{ctg} p\pi G(p) \Phi^-(p), \quad (5)$$

$$A = \frac{(1+\varepsilon_1)[1+\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_2)e]}{2[\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_1\varepsilon_2)e + \varepsilon_2e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = [\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_1\varepsilon_2)e + \varepsilon_2e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi,$$

$$G_2(p) = [1+\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi,$$

$$a_0(p) = (1+\varepsilon_1)[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),$$

$$\begin{aligned}
a_1(p) &= (1 + \varepsilon_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha], \\
b_0(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varepsilon_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\
b_1(p) &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varepsilon_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - \\
&\quad - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varepsilon_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \\
b_2(p) &= [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varepsilon_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau = -Cgl^\lambda, \\
\Phi^+(p) &= \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - v_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho.
\end{aligned}$$

Здесь  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  — достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [14, 15].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= \frac{\tau K^+(p) G^+(p)}{p + \lambda + 1} \left[ \frac{1}{K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} - \frac{1}{K^+(p) G^+(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\
\Phi^-(p) &= \frac{\tau p G^-(p)}{AK^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)(p + \lambda + 1) K^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p > 0).
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p) & (\operatorname{Re} p < 0), \\ G^-(p) & (\operatorname{Re} p > 0), \end{cases} \tag{7}$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}. \tag{8}$$

Здесь  $\Gamma(z)$  — гамма-функция.

Используя (6) — (8), можно получить выражения для меллиновских трансформант напряжений. В результате применения к этим выражениям формулы обращения Меллина, могут быть определены напряжения. В частности, получаем

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(p, \theta) M(p)}{(p + \lambda + 1) D(p)} r^{-p-1} dp, \tag{9}$$

$$M(p) = \frac{m \Gamma(1 - p) G^+(p) l^{p+1}}{\Gamma(1/2 - p)}, \quad m = -\frac{g \Gamma(\lambda + 3/2)}{\Gamma(\lambda + 2) G^+(-\lambda - 1)} Cl^\lambda,$$

$$\begin{aligned}
D(p) &= (1 + \varepsilon_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) + \\
&\quad + (1 + \varepsilon_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e.
\end{aligned}$$

Здесь  $F(p, \theta)$  — известная целая функция  $p$ ;  $\gamma$  — произвольная прямая, лежащая в полосе  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$ .

В полосе  $-1 < \operatorname{Re} p < 0$  подынтегральная функция в (9) имеет две особенности — простые полюсы в точках  $p = -\lambda - 1$  и  $p = -\lambda_1 - 1$  где  $\lambda_1$  — единственный на интервале  $] -1; 0[$  корень уравнения  $D(-x - 1) = 0$ . В таблице приведены некоторые значения корня  $\lambda_1$  ( $v_1 = v_2 = 0, 3$ ).

Используя эту информацию об особых точках подынтегральной функции в (9), применяя к интегралу (9) теорему о вычетах и складывая решения задач 1 и К, находим главный член разложения напряжения  $\sigma_\theta$  в асимптотический ряд при  $r \rightarrow 0$  в рассматриваемой задаче теории упругости с граничными условиями (1) – (3) (см. рис. 1).

Имеет место следующая формула:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = r^{\lambda_1} S(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}) \quad (r \rightarrow 0), \quad (10)$$

$$C_1 = \frac{g\Gamma(\lambda + 3/2)\Gamma(\lambda_1 + 2)G^+(-\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda)s\Gamma(\lambda + 2)\Gamma(\lambda_1 + 3/2)G^+(-\lambda - 1)} Cl^{\lambda_1 - \lambda},$$

$$s = (1 + \alpha_1) \{ [\cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [2\alpha \cos 2(\lambda_1 + 1) + \sin 2\alpha] - 2(\pi - \alpha) \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) [\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha] \} + (1 + \alpha_2) \times \\ \times \{ [2(\pi - \alpha) \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] [\cos 2(\lambda_1 + 1) - \cos 2\alpha] - 2\alpha \times \\ \times \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha [\sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha] \} e,$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} [-S_1(\lambda_1 + 2) \sin \lambda_1 \theta + S_2 \sin(\lambda_1 + 2)\theta + S_3(\lambda_1 + 2) \cos \lambda_1 \theta - S_4 \cos(\lambda_1 + 2)\theta],$$

$$S_1 = 2c_1 - [c_2 c_3 + (1 + \alpha_2) c_4 c_5] e,$$

$$S_2 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2) c_1 - [\lambda_1 c_2 c_3 - (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_2) c_4 c_6] e,$$

$$S_3 = 2c_6 c_7 - [c_6 c_3 + (1 + \alpha_1) c_4 c_8] e,$$

$$S_4 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_1) c_5 c_7 - [\lambda_1 c_5 c_3 + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1) c_4 c_8] e,$$

$$c_1 = [\cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha],$$

$$c_2 = \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha, \quad c_3 = (2\lambda_1 + 3 + \alpha_2) \sin 2\alpha + (1 - \alpha_2) \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha,$$

$$c_4 = \cos 2(\lambda_1 + 1) - \cos 2\alpha, \quad c_5 = \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha,$$

$$c_6 = \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha, \quad c_7 = \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha,$$

$$c_8 = \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha \quad (0 \leq \theta \leq \pi - \alpha).$$

Формулы, аналогичные (10), имеют место для  $\sigma_\theta(r, \theta)$  при  $-\alpha \leq \theta \leq 0$ , а также для  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  и  $\sigma_r(r, \theta)$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Угловая точка  $O$  является особой точкой рассматриваемой краевой задачи теории упругости. Она представляет собой остроконечный концентратор напряжений. При приближении точки области к точке  $O$  напряжения стремятся к бесконечности.

$e_0$	$\alpha, ^\circ$									
	15	30	45	60	75	105	120	135	150	165
2	-0,738	-0,640	-0,547	-0,430	-0,262	-0,274	-0,467	-0,613	-0,731	-0,835
3	-0,702	-0,611	-0,527	-0,419	-0,258	-0,277	-0,476	-0,628	-0,749	-0,855
5	-0,652	-0,577	-0,506	-0,408	-0,255	-0,280	-0,484	-0,641	-0,767	-0,873
10	-0,602	-0,541	-0,484	-0,398	-0,252	-0,283	-0,492	-0,653	-0,782	-0,889

Особенность напряжений в точке  $O$  степенная. Показатель степени сингулярности напряжений зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона. Этот показатель представляет собой единственный на интервале  $]-1; 0[$  корень определенного трансцендентного уравнения.

С ростом угла  $\alpha$  от нуля до  $\pi/2$  концентрация напряжений вблизи угловой точки ослабевает, а с ростом его от  $\pi/2$  до  $\pi$  — усиливается. Если угол  $\alpha$  стремится к нулю или к  $\pi$ , показатель степени сингулярности напряжений стремится к  $-1$ . Если угол  $\alpha$  стремится к  $\pi/2$ , показатель степени сингулярности напряжений стремится к нулю. Если угол  $\alpha$  острый, то с ростом отношения модулей Юнга  $E_1/E_2 > 1$  концентрация напряжений вблизи угловой точки ослабевает, а если тупой — усиливается.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 620 с.
2. *Keer L.M., Mendelsohn D.A., Achenbach J.D.* Crack at the apex of a loaded notch // Int. J. Solids and Struct. — 1977. — **13**, No 7. — P. 615–623.
3. *Ouchterlony F.* Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads // Int. J. Eng. Sci. — 1977. — **15**, No 2. — P. 109 – 116.
4. *Muki R., Westmann R.A.* Crack emanating from an open notch // J. Elast. — 1974. — **4**, No 3. — P. 173 – 186.
5. *Erdogan F., Gupta G.D.* Contact and crack problems for an elastic wedge // Int. J. Eng. Sci. — 1976. — **14**, No 2. — P. 155–164.
6. *Некислих К., Острик В.* Контакт берегів крайової тріщини у пружному клині // Машинознавство. — 2010. — № 1. — С. 8–13.
7. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. — Киев: Наук. думка, 1988. — 488 с.
8. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. — 2013. — **49**, No 1. — P. 1 – 61.
9. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. — 2014. — **50**, No 1. — P. 1–57.
10. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. — 2015. — **51**, No 1. — P. 64–84.
11. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. — 2015. — **51**, No 5. — P. 489–560.
12. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
13. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Ленинград: Наука, 1967. — 402 с.
14. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture. — New York.: McGraw-Hill, 1979. — 952 p.
15. *Nazarenko V.M., Kipnis A.L.* Stress Concentration Near the Tip of an Internal Semi-Infinite Crack in a Piecewise-Homogeneous Plane with a Nonsmooth Interface // Int. Appl. Mech. — 2015. — **51**, No 4. — P. 443 – 448.

#### REFERENCES

1. *Savruk M.P.* Stress intensity factors in the bodies with cracks, Kiev: Nauk. Dumka, 1988 (in Russian).
2. *Keer L.M., Mendelsohn D.A., Achenbach J.D.* Int. J. Solids and Struct., 1977, **13**, No 7: 615-623.
3. *Ouchterlony F.* Int. J. Eng. Sci., 1977, **15**, No 2: 109-116.
4. *Muki R., Westmann R.A.* J. Elast., 1974, **4**, No 3: 173-186.
5. *Erdogan F., Gupta G.D.* Int. J. Eng. Sci., 1976, **14**, No 2: 155-164.
6. *Nekislykh K., Ostryk V.* Eng. Sci., 2010, No 1: 8-13 (in Ukraine).

7. *Panasyuk V.V., Andrejkiiv A.E., Parton V.Z.* Fracture mechanics basis, Kiev: Nauk. Dumka, 1988 (in Russian).
8. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Int. Appl. Mech., 2013, **49**, No 1: 1-61.
9. *Guz A.N.* Int. Appl. Mech., 2014, **50**, No 1: 1-57.
10. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Int. Appl. Mech., 2015, **51**, No 1: 64-84.
11. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Int. Appl. Mech., 2015, **51**, No 5: 489-560.
12. *Nobl B.* Using of the Wiener – Hopf method for solving the partial derivative equations, Moscow: Izdatelstvo Inostr. Lit., 1962 (in Russian).
13. *Uflyand Ya. S.* Integral transformations in the theory of elasticity problems, Leningrad: Nauka, 1967 (in Russian).
14. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture, New York.: McGraw-Hill, 1979.
15. *Nazarenko V.M., Kipnis A.L.* Int. Appl. Mech., 2015, **51**, No 4: 443-448.

*Поступила в редакцію 26.04.2016*

Член-кореспондент НАН України *В.М. Назаренко, О.Л. Кипніс*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

*E-mail:* a.l.kipnis@gmail.com

**КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КУТОВОЇ ТОЧКИ  
МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ ЗА НАЯВНОСТІ МАЛОМАСШТАБНИХ  
МІЖФАЗНИХ ЗСУВНИХ ТРІЩИН, ЩО ВИХОДЯТЬ З НЕЇ**

*Розглянуто симетричну задачу механіки руйнування композитних матеріалів про пружну рівновагу кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить міжфазні лінії розриву дотичного переміщення в кутовій точці. Методом Вінера – Гопфа побудовано точний розв'язок задачі. На основі цього розв'язку досліджено поведінку напружень біля кутової точки межі поділу середовищ за наявності маломасштабних міжфазних зсувних тріщин, що виходять з неї.*

**Ключові слова:** механіка руйнування композитних матеріалів, кутова точка, міжфазна зсувна тріщина, концентрація напружень, метод Вінера – Гопфа.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine *V.M. Nazarenko, A.L. Kipnis*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* a.l.kipnis@gmail.com

**STRESS CONCENTRATION NEAR A CORNER POINT  
OF THE INTERFACE IN THE PRESENCE OF SMALL-SCALE  
INTERFACIAL SHEAR CRACKS PROPAGATING FROM IT**

*The symmetric problem of composite fracture mechanics on the elastic equilibrium of a piecewise homogeneous isotropic plane with the interfase in the form of the sides of an angle, which contains the interfacial lines of rupture of a tangential displacement at the corner point, is considered. An exact solution of the problem is constructed by the Wiener – Hopf method. Basing on this solution, the stress behavior near the corner point of the interface in the presence of small-scale interfacial shear cracks propagating from it, is investigated.*

**Keywords:** composites fracture mechanics, corner point, interfacial shear crack, stress concentration, Wiener – Hopf method.