ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2016

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.005
УДК 517.58/.5892

Н.О. Вірченко, А.М. Пономаренко

НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”
E-mail: smolya14@ukr.net

Нові узагальнення дзета-функції та функції Трікомі

(Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком)

Запроваджено нові узагальнення дзета-функції, функції Трікомі, вивчено основні їх властивості. Ці нові узагальнення виконано за допомогою (τ, β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції.

Ключові слова: *дзета-функція, функція Трікомі, конфлюентна гіпергеометрична функція.*

У зв'язку з широким використанням спеціальних функцій у теорії ймовірностей та математичній статистиці, механіці суцільного середовища, квантовій механіці, квантовій оптиці, астрофізиці, теорії дифракції, аеродинаміці, теорії кодування, біомедицині та ін. інтерес до теорії та застосувань спеціальних функцій значно посилився [1—5].

За останні роки зросла увага до узагальнених гіпергеометричних функцій за Райтом [6].

Райтом було запроваджено узагальнення гіпергеометричної функції у вигляді ряду [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+\tau_1 n)\ldots\Gamma(\alpha_p+\tau_p n)\, z^n}{\Gamma(\rho_1+\beta_1 n)\ldots\Gamma(\rho_q+\beta_q n)\, n!}, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

в якому параметри $\tau_i, \beta_j \in \mathbb{R}_+$ $(i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,q})$ та виконується умова

$$1+\sum_{k=0}^{q}\beta_k-\sum_{m=1}^{p}\tau_m>0. \tag{2}$$

При умові (2) ряд (1) збігається для всіх z, а при умові

$$1+\sum_{k=0}^{q}\beta_k-\sum_{m=1}^{p}\tau_m=0 \tag{3}$$

ряд збігається для всіх $|z|<\dfrac{1}{r}$.

У даній роботі запроваджуються нові узагальнення дзета-функції, функції Трікомі та вивчаються основні їх властивості. Це відкриває шлях до глибшого, кращого застосування цих функцій як у теорії спеціальних функцій, так і в багатьох прикладних науках тощо.

Ці нові узагальнення виконано за допомогою (τ, β) узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції [7]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) \equiv {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Phi_1 \left[\begin{matrix} (c;\tau); & \\ & zt^{\tau} \\ (c;\beta); & \end{matrix} \right] dt, \tag{4} $$

де Re c > Re $a \in$ > 0, τ ∈, τ > 0, β ∈, β > 0, τ − β > 1, Γ (a) — класична гамма-функція, ${}_1\Phi_1$ — функція Фокса-Райта [6].

Раніше [8] було запроваджено узагальнені гамма-, бета-, псі-функції, функції Лагера, Вольтерра.

1. Узагальнена дзета-функція. Як відомо [9], дзета-функція Рімана має вигляд

$$ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1, \tag{5} $$

була розглянута Ейлером у 1737 р. для дійсних α. Він довів і тотожність

$$ \zeta(\alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1}, \ \alpha = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1. \tag{6} $$

Запровадимо узагальнення дзета-функції Рімана у вигляді

$$ \zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt, \tag{7} $$

де Re r > 0; r = 0, σ > 1.

Вивчимо основні властивості $\zeta^r(\alpha)$.

Теорема 1. *Справедлива рівність*

$$ \zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{nr}(\alpha) n^{-\alpha}, \tag{8} $$

Re r > 0; r = 0, σ > 1,

де Γ_{nr} *— узагальнена гамма-функція* [8].

Доведення. Розгорнувши $(1-e^{-t})^{-1}$ в ряд за степенями e^{-t}, одержимо

$$ \zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt. \tag{9} $$

Поміняємо порядок підсумовування та інтегрування у (9) (це законно, оскільки ряд збігається до інтегрованої функції). А далі після перетворень, враховуючи означення узагальненої гамма-функції, матимемо (8).

Примітки.

1. Використовуючи властивість узагальненої гамма-функції [8], отримуємо цікаву рівність:

$$ \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{nr}(\alpha) = r^{\alpha}\Gamma(-\alpha)\zeta^r(-\alpha), \ \mathrm{Re}\, r > 0, \alpha \neq 0, 1, 2, \ldots. \tag{10} $$

2. Застосувавши рівність [9]

$$ \Gamma_r(\alpha) = 2r^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{K}_{\alpha}(2\sqrt{r}), \ \mathrm{Re}\, r > 0, \quad \left|\arg\sqrt{r}\right| < \pi, \tag{11} $$

одержимо зв'язок узагальненої дзета-функції з функцією Макдональда:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{2r^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \mathrm{K}_\alpha(2\sqrt{nr}),\ \mathrm{Re}\, r > 0\,. \tag{12}$$

3. Замінивши t на $2t$ у (7) та використавши рівність

$$(e^{2t} - 1)^{-1} = e^{-t} \operatorname{csc} h(t) / 2\,, \tag{13}$$

отримаємо таке інтегральне зображення для функції $\zeta^r(\alpha)$:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{2t}\right) \operatorname{csc} h(t)\, dt\,. \tag{14}$$

При $r = 0$ маємо відомий результат для класичної дзета-функції:

$$\zeta(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{csc} h(t)\, dt,\ \sigma > 1\,. \tag{15}$$

Теорема 2. *Для узагальненої дзета-функції справедлива формула*

$$\zeta^r(\alpha) - 2^{1-\alpha} \zeta^{2r}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1 + e^{-t}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt,\ \mathrm{Re}\, r > 0;\ r = 0,\ \sigma > 0. \tag{16}$$

Доведення. Нехай $\alpha = n$ у формулі для узагальненої Γ-функції, тоді матимемо

$$n^{-\alpha}\, \Gamma_{nr}(\alpha) = \int_0^\infty t^{-\alpha-1} e^{-nt}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt\,. \tag{17}$$

Помноживши на $(-1)^{n-1}$, просумувавши обидві частини за n, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma_{nr}(\alpha)}{n^\alpha} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1 + e^{-t})^{-1} e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right) dt\,. \tag{18}$$

Тепер із (18) та формули

$$\zeta^r(\alpha) - 2^{1-\alpha} \zeta^{2r}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \Gamma_{nr}(\alpha)}{n^\alpha}, \tag{19}$$

$\mathrm{Re}\, r > 0;\ r = 0,\ \sigma > 0,$

одержимо (16).

Наслідок. *Із* (16) *при* $r = 0$ *випливає цікава формула для класичної дзета-функції*:

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - 2^{1-\alpha})} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1 + e^t}\, dt,\ \sigma > 0. \tag{20}$$

Значний інтерес становить зв'язок між узагальненою дзета-функцією та інтегральними перетвореннями.

Очевидно, що (7) можна записати у вигляді інтегрального перетворення Мелліна:

$$\zeta^r(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} M \left\{ \frac{e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right)}{1 - e^{-t}}; \alpha \right\}, \tag{21}$$

$\mathrm{Re}\, r > 0;\ r = 0,\ \sigma > 1$

Виконавши підстановку $t = e^{-x}$, одержимо інтегральне перетворення Лапласа:

$$\zeta^r(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-re^x)}{\exp(e^{-x})-1}e^{-\alpha x}\,dx. \tag{22}$$

Підстановка $\alpha = \sigma + i\omega$ у (22) дає перетворення Фур'є:

$$\zeta^r(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-re^x)}{\exp(e^{-x})-1}e^{-i\alpha\omega x}\,dx. \tag{23}$$

Друге узагальнення дзета-функції подамо у вигляді

$$^*\zeta^r(\alpha)=\frac{1}{A(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1+e^{-t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \tag{24}$$

де $\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0, A(\alpha) = \Gamma(\alpha)\,(1 - 2^{1-\alpha})$.

Розгорнувши вираз $(1+e^{-t})^{-1}$ у ряд, одержимо

$$^*\zeta^r(\alpha)=\frac{1}{A(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-nt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \tag{25}$$

а після перетворень маємо

$$^*\zeta^r(\alpha)=\frac{1}{A(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\Gamma_{nr}(\alpha), \tag{26}$$

$\operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0$.

Узагальнення дзета-функції Гурвіця [9]

$$\zeta(\alpha,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+q)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{1-e^{-t}}dt, \tag{27}$$

$\sigma > 1, 0 < q \leqslant 1$,

подамо у вигляді

$$\zeta^r(\alpha,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)}{(n+q)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{1-e^{-t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \tag{28}$$

$$^*\zeta^r(\alpha,q)=\frac{1}{A(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{1-e^{-t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \tag{29}$$

$0 < q \leqslant 1, \operatorname{Re} r > 0; r = 0, \sigma > 0$.

Легко зауважити, що

$$\zeta_0^r(\alpha,q)={}^r\zeta(\alpha,q),\ \sigma>1, \tag{30}$$

та

$$^*\zeta^r(\alpha,q)=\frac{2^{1-\alpha}\zeta\left(\alpha,\frac{q}{2}\right)-\zeta^r(\alpha,q)}{1-2^{1-\alpha}},\quad \sigma>0,\quad 0<q\leqslant 1. \tag{31}$$

Теорема 3. *Справедлива рівність*

$$^{*}\zeta^{r}(\alpha,q)=\frac{2^{1-\alpha}\zeta^{2r}\left(\alpha,\dfrac{q}{2}\right)-\zeta^{r}(\alpha,q)}{1-2^{1-\alpha}}. \tag{32}$$

Доведення. Виконавши заміну q на $\dfrac{q}{2}$ у (28), t на $2t$, одержимо

$$\zeta^{2r}\left(\alpha,\frac{q}{2}\right)=\frac{2^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{1-e^{-2t}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{2t}\right)dt. \tag{33}$$

Але

$$2(1-e^{-2t})=(1-e^{-t})^{-1}+(1+e^{-t})^{-1}. \tag{34}$$

Із (33) і (34) дістанемо

$$2^{1-\alpha}\zeta^{2r}\left(\alpha,\frac{q}{2}\right)-\zeta^{r}(\alpha,q)=(1-2^{1-\alpha})^{*}\zeta^{r}(\alpha,q),$$

а звідси одержимо (32). Використавши співвідношення

$$\frac{1}{e^{t}+1}=\frac{1}{e^{t}-1}-\frac{2}{e^{2t}-1},\quad \int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^{2t}-1}dt=2^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t}-1}dt,$$

матимемо аналітичне продовження

$$\zeta^{r}(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-2^{1-\alpha})}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t+}1}dt. \tag{35}$$

2. Узагальнена функція Трікомі. Трікомі у 1927 р. запропонував функцію $\Psi(a, c; x)$ [10]:

$$\psi(a,c;x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}dt, \tag{36}$$

яка визначає розв'язок рівняння [9]

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=0 \tag{37}$$

у півплощині Re $x > 0$. Область визначення можна розширити поворотом шляху інтегрування.

Запровадимо узагальнення функції Трікомі (36) у вигляді

$$^{r}U^{\tau,\beta}(a,c;x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \tag{38}$$

де Re $a >$ Re $c > 0$, $(\tau, \beta) \subset \mathbb{R}_+$; $\tau > 0$; $\tau - \beta < 1$, $a, c \subset \mathbb{C}$, $\delta > 0$, $r > 0$, Re $\alpha >$ Re $\gamma > 0$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — r-узагальнена (τ, β) конфлюентна гіпергеометрична функція (4). Формули диференціювання для $^{r}U^{\tau,\beta}(a,c;x)$ одержуємо безпосереднім диференціюванням:

$$\frac{d}{dx}\,{}^{r}U^{\tau,\beta}(a,c;x)=-\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}t^{a}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \tag{39}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}^rU^{\tau,\beta}(a,c;x)=-\frac{(-1)^n}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a+n-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^\delta}\right)dt=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\,{}^rU^{\tau,\beta}(a+n,c+n;x). \qquad (40)$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 4. *При умовах існування функції* ${}^rU^{\tau,\beta}(a,c;x)$ *справедливі такі функціональні співвідношення*:

$$ {}^rU^{\tau,\beta}(a,c;\alpha+1;\gamma;\delta;x)=(\gamma-\alpha-1)\,{}^rU^{\tau,\beta}(a,c;\alpha;\gamma;\delta;x)+$$
$$+\frac{r\tau(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(a-\delta)\,\mathrm{B}(\alpha+\tau,\gamma+\beta-\alpha-\tau)}{\alpha\Gamma(a)\,\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\,{}^rU^{\tau,\beta}(a-\delta,c-\delta;\alpha+\tau;\gamma+\beta;\delta;x). \qquad (41)$$

$$ {}^rU^{\tau-\alpha,\beta-\gamma}(a,c;\alpha+1;\gamma;\delta;x)=(\gamma-\alpha-1)\,{}^rU^{\tau-\alpha,\beta-\gamma}(a,c;\alpha;\gamma;\delta;x)+$$
$$+\frac{r(\tau-\alpha)(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(a-\delta)\,\mathrm{B}(\tau,\beta-\tau)}{\alpha\Gamma(a)\,\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\,{}^rU^{\tau-\alpha,\beta-\gamma}(a-\delta,c-\delta;\tau;\beta;\delta;x). \qquad (42)$$

Доведення виконуємо за допомогою певних замін α, $\tau=\tau_1+\alpha$, $\beta=\beta_1+\gamma$ та простих, але громіздких перетворень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Andrews L.G.* Special Function for Engineers and Applied Mathematics. — New York: Macmillan, 1985. — 350 p.
2. *Andrews G., Askey R., Roy R.* Special Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 1999. — 410 p.
3. *Edwards H.M.* Riemann’s Zeta Function. — New York: Academic Press, 1954. — 370 p.
4. *Ewell J.A.* A new series representation for $\varsigma(3)$ // Amer. Math. Monthly. — 1990. — **97**. — P. 219—220.
5. *Titchmarsh E.C.* The Theory of Riemann Zeta-Function. — London: Oxford Univ. Press, 1951. — 320 p.
6. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. — 1940. — **46**, No 2. — P. 389—408.
7. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calculus and App. Anal. — 2006. — **9**, No 2. — P. 101—108.
8. *Вірченко Н.* Узагальнені гіпергеометричні функції. — Київ: НТУУ “КПІ”, 2016. — 480 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи М.* Высшие трансцендентные функции.- Москва: Наука, 1965. — Т. 1. — 296 с.
10. *Tricomi F.* Funzioni Ipergeometriche Confluenti. — Roma: Edizioni Cremonese, 1954. — 310 s. — (Monografie Matematiche, Bd. 1).

REFERENCES

1. *Andrews L.G.* Special Function for Engineers and Applied Mathematics, New York: Macmillan, 1985.
2. *Andrews G., Askey R., Roy R.* Special Function, New York: Cambridge Univ. Press, 1999.
3. *Edwards H.M.* Riemann's Zeta Function, NewYork: Academic Press, 1954.
4. *Ewell J.A.* Amer. Math. Monthly, 1990, **97**: 219-220.
5. *Titchmarsh E.C.* The Theory of Riemann Zeta-Function, London: Oxford Univ. Press, 1951.
6. *Wright E.M.* Proc. London Math. Soc, 1940, **46**, No 2: 389-408.
7. *Virchenko N.* Fract. Calculus and App. Anal., 2006, **9**, No 2: 101-108.
8. *Virchenko N.* The generalized hypergeometric functions, Kiev: NTU of Ukraine “KPI”, 2016 (in Ukrainian).
9. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, New York: McGraw-Hill, 1953, Vol. 1.
10. *Tricomi F.* Funzioni Ipergeometriche Confluenti, Monografie Matematiche, Bd. 1, Roma: Edizioni Cremonese, 1954.

Надійшло до редакції 06.06.2016

Н.А. Вирченко, А.Н. Пономаренко

НТУ Украины “Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского”
E-mail: smolya14@ukr.net

НОВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ
И ФУНКЦИИ ТРИКОМИ

Введены новые обобщения дзета-функции, функции Трикоми, изучены основные их свойства. Эти новые обобщения выполнены с помощью (τ, β)*-обобщенной конфлюэнтной гипергеометрической функции.*

Ключевые слова: *дзета-функция, функция Трикоми, конфлюэнтная гипергеометрическая функция.*

N.O. Virchenko, A.M. Ponomarenko

NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute”
E-mail: smolya14@ukr.net

NEW GENERALIZATIONS OF THE ZETA-FUNCTION
AND THE TRICOMI FUNCTION

New generalizations of the zeta-function and the Tricomi function are presented, and their main properties are studied. These new generalizations are realized with help of the (τ, β)*-generalized confluent hypergeometric function.*

Keywords: *zeta-function, Tricomi function, confluent hypergeometric function.*