doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.010
УДК 517.5

А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк
Інститут математики НАН України, Київ
Східноєвропейський національний університет, ім. Лесі Українки, Луцьк
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток з узагальненими ядрами Пуассона

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М.Л. Горбачуком)

Знайдено асимптотично непокращувані оцінки верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π-періодичних функцій, які зображуються згортками функцій φ, що належать одиничним кулям просторів L_p, з узагальненими ядрами Пуассона. Для одержаних асимптотичних рівностей наведено оцінку залишкового члена, яка виражається в явному вигляді через абсолютні сталі та параметри задачі, що може бути корисним для практичного застосування.

Ключові слова: *суми Фур'є, асимптотична рівність, узагальнені ядра Пуассона, задача Колмогорова—Нікольського.*

Нехай L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій f, в якому норма задана формулою

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Позначимо через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, множину всіх 2π-періодичних функцій, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки (див., наприклад, [1, с. 144])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \;\; a_0 \in \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_p \leqslant 1, \;\; \varphi \perp 1,$$

з фіксованими твірними ядрами:

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

які називають узагальненими ядрами Пуассона. При $r=1$ і $\beta=0$ ядра $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ є звичайними ядрами Пуассона гармонічних функцій.

При довільних $r>0$ класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, належать до множини D^{∞} нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій (див., наприклад, [1, с. 139], [2, с. 1408]). Більше того, як випливає з теореми 1 роботи [3], при довільному $r>0$ має місце вкладення $C^{\alpha,r}_{\beta,p}\subset\mathcal{T}_{1/r}$, де $\mathcal{T}_a$, $a>0$, — відомі класи Жевре

$$\mathcal{T}_a=\left\{f\in D^{\infty}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\left\|f^{(k)}\right\|_C}{(k!)^a}\right)^{1/k}<\infty\right\}.$$

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C=\sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta,p}}\left\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\right\|_C,\ \ r>0,\ \ \alpha>0,\ \ \beta\in\mathbb{R},\ \ 1\leqslant p\leqslant\infty, \qquad (1)$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f.

У даній роботі розглядається задача про знаходження асимптотичних при $n\to\infty$ рівностей для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, при $0<r<1$ і $1\leqslant p\leqslant\infty$.

У випадку $r=1$ і $p=\infty$ асимптотичні рівності для величин (1) встановлено в роботах С.М. Нікольського [4, с. 221] та С.Б. Стєчкіна [5, с. 139]. У роботі [6, с. 1095] знайдено асимптотичні при $n\to\infty$ рівності для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, при $r=1$ і довільних $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Крім того, як випливає з [7, с. 186] при $p=2$ та всіх $r>0$, мають місце рівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2})_C=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}e^{-2\alpha k^r}\right)^{1/2},\ \ n\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

У випадку $r>1$ і $p=\infty$ асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, були одержані О.І. Степанцем [8, с.131] та С.О. Теляковським [9].

При $r>1$ і довільних $1\leqslant p\leqslant\infty$ задачу про точну асимптотику величин $\mathcal{E}_n(\mathrm{C}^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, при $n\to\infty$ розв'язано в [6, с. 1094].

Що ж стосується випадку $0<r<1$, то асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(\mathrm{C}^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, за винятком наведеного випадку $p=2$, були відомі лише у випадку $p=\infty$ завдяки роботі О.І. Степанця [10, с. 758], який показав, що

$$\mathcal{E}_n(\mathrm{C}^{\alpha,r}_{\beta,\infty})_C=\frac{4}{\pi^2}e^{-\alpha n^r}\ln n^{1-r}+O(1)e^{-\alpha n^r}, \qquad (3)$$

де $O(1)$ — величина, що рівномірно обмежена відносно n і β.

Зауважимо, що при довільних $0<r<1$ і $1\leqslant p<\infty$ для величин $\mathcal{E}_n(\mathrm{C}^{\alpha,r}_{\beta,p})_C$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, виконуються порядкові оцінки (див., наприклад, [11, с. 111], [12, с. 278])

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\mathrm{p}})_C\asymp e^{-\alpha n^r}n^{(1-r)/p}.$$

Щоб сформулювати основні результати роботи введемо такі позначення.

При довільних $v>0$ і $1\leqslant s\leqslant\infty$ покладемо

$$J_s(v):=\left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_s[0,\,v]},$$

де

$$\|f\|_{L_s[a,b]}=\begin{cases}\left(\int\limits_a^b|f(t)|^s\,dt\right)^{1/s}, & 1\leqslant s<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|, & s=\infty.\end{cases}$$

Також при довільних $\alpha>0$, $r\in(0,1)$ і $1\leqslant p\leqslant\infty$ покладемо $n_0=n_0(\alpha,r,p)$ — найменший з номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}+\frac{\alpha r\chi(p)}{n^{1-r}}\leqslant\begin{cases}\frac{1}{14}, & p=1,\\ \frac{p-1}{(3\pi)^3p}, & 1<p<\infty,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p=\infty,\end{cases}\tag{4}$$

де $\chi(p)=p$ при $1\leqslant p<\infty$ і $\chi(p)=1$ при $p=\infty$.

У прийнятих позначеннях має місце нижчесформульоване твердження, яке є основним результатом роботи.

Теорема 1. *Нехай* $0<r<1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha>0$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $n\geqslant n_0(\alpha,r,p)$ *справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n(\mathrm{C}^{\alpha,r}_{\beta,p})_C=e^{-\alpha n^r}n^{(1-r)/p}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}(\alpha r)^{1/p}}J_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\gamma^{(1)}_{n,p}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/p}}J_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{(1-r)/p}}\right)\right),\tag{5}$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, *а для величини* $\gamma^{(1)}_{n,p}=\gamma^{(1)}_{n,p}(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\left|\gamma^{(1)}_{n,p}\right|\leqslant(14\pi)^2$.

Ключовим твердженням, на якому грунтується доведення теореми 1, є така лема.

Лема. *Нехай* $1\leqslant s\leqslant\infty$, *а* 2π*-періодичні функції* $g(t)$ *і* $h(t)$ *мають скінченні похідні і задовольняють умови*

$$r(t):=\sqrt{g^2(t)+h^2(t)}\neq 0,$$

$$M:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\sqrt{(g'(t))^2+(h'(t))^2}}{\sqrt{g^2(t)+h^2(t)}}<\infty.$$

Тоді для функції

$$\phi(t)=g(t)\cos(nt+\gamma)+h(t)\sin(nt+\gamma),\ \ \gamma\in\mathbb{R},\ \ n\in\mathbb{N},$$

при всіх натуральних n таких, що

$$n \geqslant \begin{cases} 4\pi s M, & 1 \leqslant s < \infty, \\ 1, & s = \infty, \end{cases}$$

мають місце оцінки

$$\|\phi\|_s = \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(1)} \frac{M}{n} \right),$$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\phi(t) - \lambda\|_s = \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(2)} \frac{M}{n} \right),$$

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \| \phi(t+h) - \phi(t) \|_s = \|r\|_s \left(\frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}} + \delta_{s,n}^{(3)} \frac{M}{n} \right),$$

в яких $\left|\delta_{s,n}^{(i)}\right| < 14\pi,\ i = \overline{1,3}$.

Наведена лема дає можливість довести, що при довільних $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *і* $n \in \mathbb{N}$ таких, що $n \geqslant n_0(\alpha, r, p)$ мають місце співвідношення

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t) - \lambda \right\|_s =$$

$$= e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1/p'} (\alpha r)^{1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) + \delta_{n,p} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+1/p}} J_{p'} \left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} \right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{(1-r)/p}} \right) \right), \tag{6}$$

в яких $P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, а для величини $\delta_{n,p} = \delta_{n,p}(\alpha, r, \beta)$ виконується нерівність $\left|\delta_{n,p}\right| \leq 196\pi$.

Зауваження. Оцінка (6) при вказаних вище значеннях розглядуваних параметрів залишається вірною, якщо в лівій її частині замість $\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| P_{\alpha,r,\beta}^{(\mathrm{n})}(t) - \lambda \right\|_{p'}$ покласти $\left\| P_{\alpha,r,\beta}^{(n)} \right\|_{p'}$ або $\sup_{h \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left\| P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t+h) - P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t) \right\|_{p'}$.

Оскільки з урахуванням співвідношення двоїстості

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C = \sup_{\varphi \in B_p^0} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t) \varphi(t) dt = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| P_{\alpha,r,\beta}^{(n)}(t) - \lambda \right\|_{p'}, \tag{7}$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то при $n \geqslant n_0(\alpha, r, p)$ з (6) і (7) випливає (5).

При $1 \leqslant p < \infty$ з теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 2. Нехай $0 < r < 1$, $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $1 < p < \infty$ *і* $n \geqslant n_0(\alpha, r, p)$ *справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C = e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p}\left(\begin{aligned}&\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}(\alpha r)^{1/p}}\left(\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{p'/2}}\right)^{1/p'}+\\ &+\gamma^{(2)}_{n,p}\left(\frac{1}{p'-1}\frac{(\alpha r)^{(p'-1)/p}}{n^{(1-r)(p'-1)}}+\frac{p^{1/p'}}{(\alpha r)^{1+1/p}}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{(1-r)/p}}\right)\end{aligned}\right), \tag{8}$$

а при $p=1$ і $n\geqslant n_0(\alpha,r,1)$ — оцінка

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma^{(2)}_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right), \tag{9}$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$*, а для величини* $\gamma^{(2)}_{n,p}=\gamma^{(2)}_{n,p}(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\left|\gamma^{(2)}_{n,p}\right|\leqslant(14\pi)^2$.

При $p=2$, виходячи з (8), отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $0<r<1$, $\alpha>0$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $n\geqslant n_0(\alpha,r,2)$ *справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2})_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-2\alpha k^r}\right)^{1/2} = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}} n^{(1-r)/2}\left(1+\gamma^{(1)}_n\left(\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}+\frac{\sqrt{\alpha r}}{n^{(1-r)/2}}\right)\right), \tag{10}$$

де для величини $\gamma^{(1)}_n=\gamma^{(1)}_n(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\left|\gamma^{(1)}_n\right|\leqslant 392\pi^{5/2}$.

Зауважимо, що виходячи з рівності (2) при $\alpha>0$, $r\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\geqslant n_0(\alpha,r,2)$ можна показати справедливість оцінки

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2})_C = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}} n^{(1-r)/2}\left(1+\gamma^{(2)}_n\left(\frac{1}{2\alpha r}\frac{1}{n^r}+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}\right)\right), \tag{11}$$

де для величини $\gamma^{(2)}_n=\gamma^{(2)}_n(\alpha,r,\beta)$ виконується нерівність $\left|\gamma^{(2)}_n\right|\leqslant\sqrt{\frac{54\pi^3}{54\pi^3-1}}$.

Формула (11) містить більш точну порівняно з (10) оцінку залишкового члена.

Покладемо $n_1=n_1(\alpha,r)$ — найменший з номерів n такий, що

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\left(1+\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}<\frac{1}{(3\pi)^3}.$$

Тоді при $p=\infty$ з теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $0<r<1$, $\alpha>0$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $n\geqslant n_1(\alpha,r)$ *справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi^2}e^{-\alpha n^r}\ln\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\gamma^{(2)}_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}, \tag{12}$$

де для величини $\gamma^{(2)}_{n,\infty}=\gamma^{(2)}_{n,\infty}(\alpha,r,\beta)$ *виконується нерівність* $\left|\gamma^{(2)}_{n,\infty}\right|\leqslant 20\pi^4$.

Співвідношення (12) уточнює встановлену О.І. Степанцем в [10] асимптотичну рівність (3).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч., Ч.I. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — 427 с. — (Праці Інституту математики НАН України; Т. 40).
2. *Степанець О.І., Сердюк А.С., Шидліч А.Л.* Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій// Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 10. — С. 1399—1409.
3. *Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* О связи классов (ψ,β)-дифференцируемых функций с классами Жевре // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 1. — С. 140—145.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207—256.
5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126—151.
6. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. —2005. — **57**, № 8. — С. 1079—1096.
7. *Сердюк А.С., Соколенко І.В.* Рівномірні наближення класів $(\psi,\bar{\beta})$ -диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 181—189.
8. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.
9. *Теляковский С.А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 4. — С. 510—518.
10. *Степанец А.И.* Уклонение сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций// Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 6. — С. 750—758.
11. *Темляков В. Н.* Об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. — 1990. — **5**, № 2. — С. 111—114.
12. *Сердюк А.С., Степанюк Т.А.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 255—282.

REFERENCES

1. *Stepanets A.I.* Methods of Approximation Theory, Vol. 1, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2002 (in Russian).
2. *Stepanets' A.I., Serdyuk A.S., Shidlich A.L.* Ukr. Math. J., 2007, **59**, No 10: 1569—1580.
3. *Stepanets A.I., Serdyuk A.S., Shidlich A.L.* Ukr. Math. J., 2009, **61**, No 1: 171—177.
4. *Nikol'skii S.M.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 1946, **10**, No 3: 207-256 (in Russian).
5. *Stechkin S.B.* Tr. Mat. Instituta im. V.A. Steklova, 1980, **145**: 126—151 (in Russian).
6. *Serdyuk A.S.* Ukr. Math. J., 2005, **57**, No 8: 1275—1296.
7. *Serdyuk A.S., Sokolenko I.V.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2011, **8**, No 1: 181-189 (in Ukrainian).
8. *Stepanets A.I.* Classification and Approximation of Periodic Functions, Kiev: Naukova Dumka, 1987 (in Russian).
9. *Telyakovskii S.A.* Ukr. Math. J., 1989, **41**, No 4: 444—451.
10. *Stepanets A.I.* Ukr. Mat. J., 1984, **36**, No 6: 567—573.
11. *Temlyakov V.N.* Dokl. razsh. zased. semin. Instituta Prykl. Matematiki im. I.N. Vekua, 1990, **5**, No 2: 111—114 (in Russian).
12. *Serdyuk A.S., Stepanyuk T.A.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2013, **10**, No 1: 255—282 (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 25.04.2016

А.С. Сердюк, Т.А. Степанюк

Институт математики НАН Украины, Киев
Восточноевропейский национальный университет им. Леси Украинки, Луцк
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ
НА КЛАССАХ СВЕРТОК С ОБОБЩЕННЫМИ ЯДРАМИ ПУАССОНА

Найдены асимптотически неулучшаемые оценки верхних граней приближений суммами Фурье в равномерной метрике на классах 2π-периодических функций, представляющихся свертками функций φ, принадлежащих единичным шарам пространств L_p, с обобщенными ядрами Пуассона. Для полученных асимптотических равенств приведена оценка остаточного члена, выражающаяся в явном виде через абсолютные постоянные и параметры задачи, что может быть полезным для практического применения.

Ключевые слова: *суммы Фурье, асимптотическое равенство, обобщенные ядра Пуассона, задача Колмогорова—Никольского.*

A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk

Institute of Matematics of the NAS of Ukraine, Kiev
Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

UNIFORM APPROXIMATIONS BY FOURIER SUMS ON CLASSES
OF CONVOLUTIONS WITH GENERALIZED POISSON KERNELS

We find asymptotic unimprovable equalities for exact upper bounds of approximations by Fourier sums in a uniform metric on the classes of 2π-periodic functions representable in the form of convolutions of functions φ, which belong to unit balls of spaces L_p, with generalized Poisson kernels. For the obtained asymptotic equalities, we introduce the estimate of a remainder, which is expressed in the explicit form via absolute constants and parameters of the problem. This can be useful for practical application.

Keywords: *Fourier sums, asymptotic equality, generalized Poisson kernels, Kolmogorov—Nikol'skii problem.*