

Член-корреспондент НАН Украины **В. И. Осадчий,**  
**Н. Н. Осадчая, Л. А. Ковальчук, О. Я. Скриник**

Украинский гидрометеорологический институт ГСЧС Украины и НАН Украины, Киев  
*E-mail:* LeonidKovalchuk@ukr.net

## **Моделирование бифуркаций статистических распределений концентраций азота аммонийного в Десне**

*Дано объяснение стохастических бифуркаций плотности вероятности концентраций азота аммонийного в Десне, как следствие случайного совпадения двух естественных процессов: пониженного водного стока и повышенного теплового фона. Достоверность вывода составляет около 75%. Моделирование выполнено посредством стохастического дифференциального уравнения с управляющим параметром.*

**Ключевые слова:** стохастические бифуркации, плотность вероятности, азот аммонийный, стохастическое дифференциальное уравнение.

**Состояние проблемы.** Восстановление естественного состояния поверхностных вод, подверженных антропогенному воздействию, требует разработки мероприятий на основе знаний природных параметров водных объектов, в частности содержания растворенных химических веществ. В этой связи был разработан метод вероятностно-статистического разделения концентрации наблюдаемых компонент на природную и антропогенную составляющую [1], применимость которого ограничена одномодальными распределениями. При многомодальности возникает вопрос, чем обусловлено появление дополнительных мод: бифуркациями внутри системы под воздействием естественных факторов или же дополнительными антропогенными источниками. На первый взгляд решение возможно в рамках теории динамических систем, где исследованы типичные стохастические дифференциальные уравнения, порождающие бифуркации при критических значениях управляющих параметров [2, 3]. Однако применение “методов познания сложного” [2], ставших основой исследования микропроцессов, сталкивается с рядом проблем при изучении стохастических макропроцессов качества вод. Прежде всего – с необходимостью восстановления процессов по историческим наблюдениям гидрохимических компонентов, затем – с созданием стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику конкретных растворенных веществ с учетом возможных бифуркаций, и, наконец, – с идентификацией управляющих природных параметров.

Наша цель – выбрать среди известных дифференциальное уравнение и определить его управляющий естественный параметр, объясняющий бифуркации плотности вероятности концентраций азота аммонийного, на примере бассейна реки Десна.

**Материал и методика.** В основу исследования положены материалы ежедневных гидрохимических наблюдений за содержанием азота аммонийного ( $\text{NH}_4^+$ , мг N/дм<sup>3</sup>) в замыкающем створе р. Десны с 1991 по 2003 гг.

Для исследования выбрано уравнение, называемое “трехкратным равновесием”, которое дополнено аддитивным шумом [3]:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}n(t), \quad (1)$$

где  $x$  – концентрация растворенного вещества (мг/дм<sup>3</sup>);  $t$  – время;  $\alpha$  – управляющий параметр процесса;  $D$  – дисперсия процесса;  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум.

Полагается, что уравнение (1) генерирует реализации, подобные фактически наблюдаемому временному ряду  $N(\text{NH}_4^+)$ . Плотность вероятности процесса получена в результате решения уравнения Фокера–Планка–Колмогорова для уравнения (1):

$$p(x) = C \exp \left\{ \frac{x^2}{4D} (2\alpha - x^2) \right\}, \quad (2)$$

где  $C$  – нормировочная константа. Если  $\alpha < 0$ , то распределение одномодальное, куполоподобное, если  $\alpha > 0$ , то распределение двухмодальное.

В основу поиска управляющего параметра процесса положена следующая гипотеза. Несмотря на то что концентрация азота аммонийного в реке зависит от множества факторов (например, сброса сточных вод, применения удобрений на площади водосбора, его зазеленности и распаханности), нами выбраны важнейшие: речной сток и тепловой фон. Двухмодальность возникает при случайной сопряженности двух явлений, а именно: низкого стока, что ограничивает поступление азота аммонийного в водоем вследствие уменьшения объема носителя, и увеличения теплового фона, что способствует интенсивной биологической трансформации аммония в нитриты путем нитрификации. В результате управляющий параметр представлен, как совместная вероятность низкого стока и повышенной температуры воздуха. Состояние стока ассоциировалось с ежемесячными отклонениями от нормы (аномалиями) расходов воды, а состояние теплового фона – с ежемесячными аномалиями температуры воздуха. Вероятности пониженных аномалий расходов воды и вероятности повышенных аномалий температур воздуха рассчитывались с помощью интегралов вероятностей соответствующих законов статистических распределений, идентифицированных с помощью обобщенного симметричного экспоненциального распределения (Generalized normal distribution: version 1) [1]. Принято, что процесс достигает точки бифуркации при вероятности  $> 0,5$  пониженных аномалий расходов воды и вероятности  $> 0,5$  повышенных

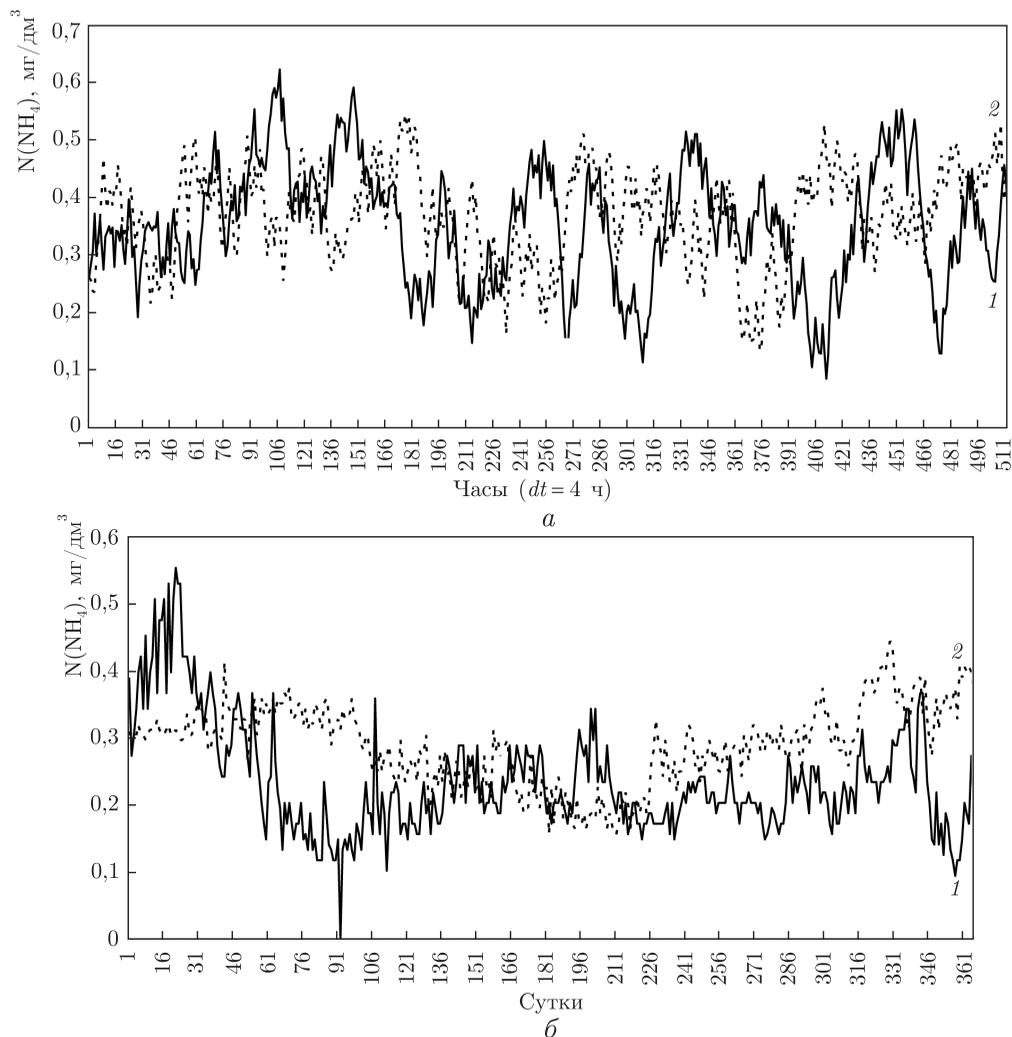


Рис. 1. Пример статистического подобию: *а* – реализаций (1, 2), полученных по модели (1), *б* – временных рядов концентраций азота аммонийного  $N(NH_4)$  в 1995 г. (1) и 2002 г. (2)

аномалий температуры воздуха, т.е. при совместной вероятности  $\alpha > 0,25$ . Если совместная вероятность равна или меньше 0,25, то управляющий параметр  $\alpha$  равен нулю или отрицательный, что соответствует одномодальности, если же  $\alpha > 0,25$ , то есть основания предполагать наличие бифуркации.

Проверка гипотезы выполнена путем сопоставления ежегодных статистических распределений концентраций азота аммонийного с ежегодными плотностями вероятностей, вычисленными посредством уравнения (2) при учете рассчитанных значений управляющего параметра.

Особо отметим, что проверка гипотезы с использованием строгих критериев в нашем случае не целесообразна, так как относительные погрешности определений расходов воды или концентраций азота аммонийного составляют 10–20 % наблюдаемой величины.

**Обсуждение результатов исследований.** Полученные в качестве примера с помощью модели (1) две реализации для процесса близки по нерегулярной цикличности

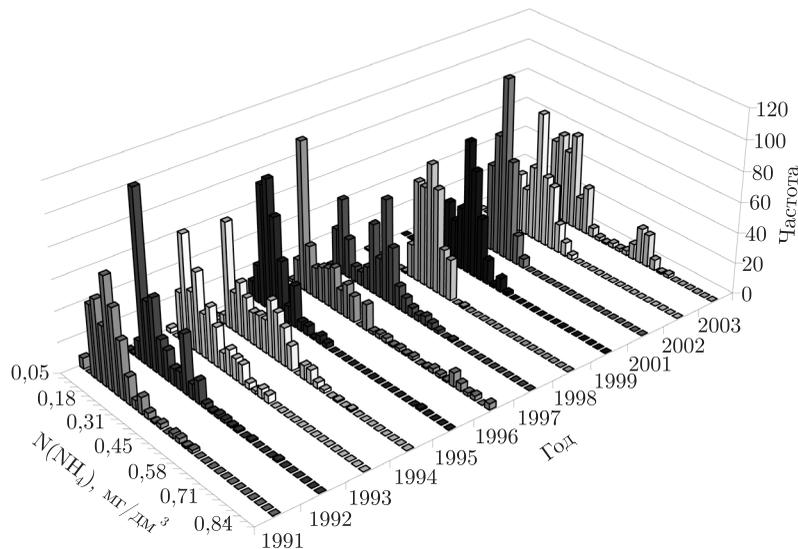


Рис. 2. Экспериментальный стохастический процесс концентраций азота аммонийного  $N(NH_4)$  в Десне за период 1991–2003 гг., представленный посредством гистограмм

и амплитуде к временным рядам ежедневных концентраций азота аммонийного в 1995, 2002 гг. (рис. 1). Таких реализаций, в большей или меньшей мере похожих на фактические временные ряды концентраций с близкими статистическими параметрами, может быть бесконечное множество. Учитывая нашу цель, мы допустили, что модель (1) пригодна для моделирования бифуркаций плотности вероятностей концентраций  $NH_4^+$ .

Вычисленные ежегодные значения управляющего параметра имели отрицательные значения в шести случаях, что соответствует отсутствию бифуркаций, и положительные значения

Таблица 1. Значения управляющего параметра стохастического дифференциального уравнения (1) и его стационарной плотности вероятности (2)

Год	Значение управляющего параметра
1991	-0,071
1992	0,217
1993	0,042
1994	-0,123
1995	-0,039
1996	0,122
1997	0,062
1998	-0,194
1999	-0,101
2001	-0,131
2002	0,140
2003	0,022

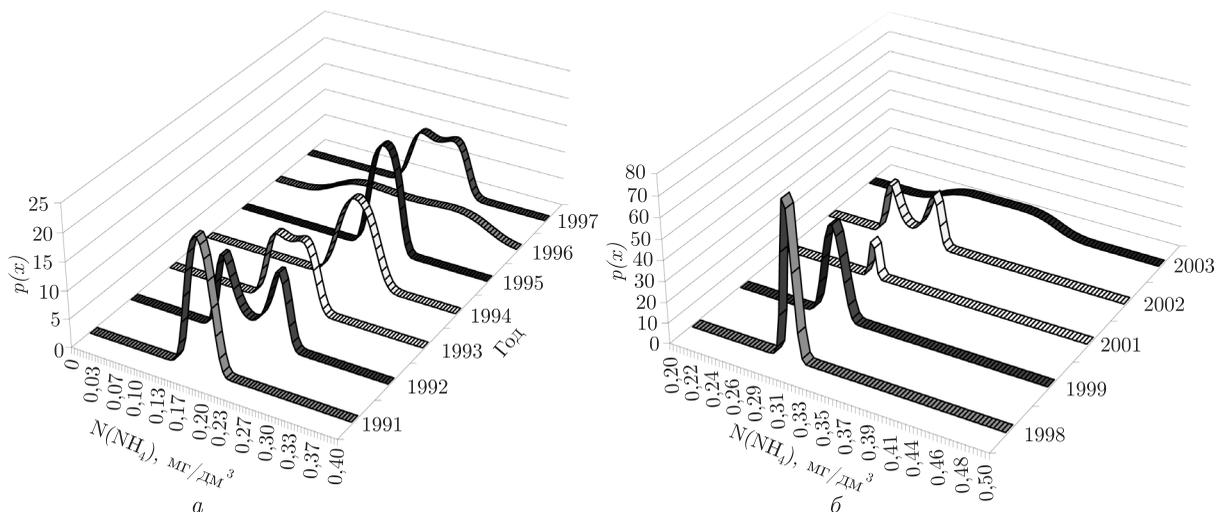


Рис. 3. Проявления бифуркаций плотности вероятностей концентраций  $N(\text{NH}_4)$  в Десне, вычисленных согласно модели (2) за периоды: а – 1991–1997 гг., б – 1998–2003 гг.

также в шести случаях в 1992, 1993, 1996, 1997, 2002 и 2003 гг., когда, возможно, происходили бифуркации (табл. 1). Сопоставляя эффекты, предполагаемые по знаку управляющего параметра, со статистическими распределениями концентраций азота аммонийного по годам, можно говорить о видимом соответствии в 1991, 1992, 1993, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2001 и 2003 гг., что составляет около 75–80 % анализируемых случаев (рис. 2). Согласованность теоретических плотностей вероятностей по годам (рис. 3) и статистических распределений фактических концентраций азота аммонийного также не является полным, но близким к 75–80 %.

Таким образом, наличие двух мод в статистических распределениях концентраций азота аммонийного может быть следствием естественных процессов. В этой связи нет оснований утверждать, что дополнительные моды являются результатом антропогенных воздействий.

## Цитированная литература

1. *Осадчий В. И., Ковальчук Л. А.* Теоретические основы вероятностно-статистического разделения величины показателей химического состава водных объектов на природную и антропогенную составляющие // Доп. НАН України. – 2013. – № 4. – С. 97–103.
2. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. – Москва: Мир, 1990. – 344 с.
3. *Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Стохастические бифуркации // Изв. вузов “ПНД”. – 2009. – № 5. – С. 3–16.

## References

1. *Osadchii V. I., Kovalchuk L. A.* Dopov. NAN Ukraine, 2013, No 4: 97–103 (in Russian).
2. *Nicolis G., Prigogine I.* Exploring complexity, Moscow: Mir, 1990 (in Russian).
3. *Vadivasova T. E., Anishchenko V. S.* Izv. vuzov “PND”, 2009, No 5: 3–16 (in Russian)

Поступило в редакцию 21.03.2016

Член-кореспондент НАН України **В.І. Осадчий, Н.М. Осадча,  
Л.А. Ковальчук, О.Я. Скриник**

Український гідрометеорологічний інститут ДСНС України і НАН України, Київ  
*E-mail:* LeonidKovalchuk@ukr.net

### **Моделювання біфуркацій статистичних розподілів концентрацій азоту амонійного в Десні**

*Дано пояснення стохастичних біфуркацій густини ймовірності концентрацій азоту амонійного в Десні, як наслідку випадкового збігу двох природних процесів: пониженого водного стоку та підвищеного теплового фону. Достовірність висновку становить близько 75 %. Моделювання виконане за допомогою стохастичного диференціального рівняння з керувальним параметром.*

**Ключові слова:** стохастичні біфуркації, густина ймовірності, азот амонійний, стохастичне диференціальне рівняння.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V.I. Osadchiy,  
N.N. Osadcha, L.A. Kovalchuk, O.Y. Skrynyk**

Ukrainian Hydrometeorological Institute of the State Emergency Service of Ukraine  
and the NAS of Ukraine, Kiev  
*E-mail:* LeonidKovalchuk@ukr.net

### **The modelling of bifurcations of the statistical distributions of the concentrations of ammonia nitrogen in the river Desna**

*Stochastic bifurcations of the probability density of the nitrogen concentration of ammonia in the river Desna are explained as a result of the accidental coincidence of two natural processes: reduced water flow and high thermal background. The reliability of the output is about 75 %. The modeling is done with a stochastic differential equation with the control parameter.*

**Keywords:** stochastic bifurcations, probability density, ammonia nitrogen, stochastic differential equation.