ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2016

МЕХАНІКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.037

УДК 539.3

В.И. Бабенко, М.Д. Дунаевская

Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков

E-mail: babenko@ilt.kharkov.ua

К оценке критического давления для замкнутой, строго выпуклой оболочки неканонической формы

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Получена априорная оценка сверху асимптотического значения критического давления для строго выпуклой, замкнутой оболочки неканонической формы по двум ее интегральным параметрам: диаметру срединной поверхности и радиусу шара, содержащегося в оболочке.

Ключевые слова: критическое давление, строго выпуклая оболочка, неканоническая форма.

1. В [1] получены априорные оценки сверху асимптотического значения критического давления для строго выпуклой оболочки неканонической формы в зависимости от заданных возможных вариантов ограничений на размеры срединной поверхности F оболочки такие как: диаметр поверхности F, объем ограниченного ею тела L, площадь “поперечного” сечения тела L; высоту поверхности F и площадь области, ограниченной ее плоским краем (для незамкнутой оболочки). В данной работе дополним полученные в [1] результаты для еще одного варианта ограничений на размеры замкнутой оболочки.

2. Рассматривается близкое к безмоментному напряженно-деформированное равновесное состояние достаточно тонкой, строго выпуклой, замкнутой оболочки (общей) неканонической формы, находящейся под действием равномерного внешнего давления P. Материал оболочки линейно упругий, однородный и изотропный. Предполагается, что срединная поверхность F оболочки имеет непрерывные нормальные кривизны, строго положительную гауссову кривизну K; диаметр поверхности F не меньше D_0 и существует содержащийся в F шар радиуса не меньше R_0; а потеря устойчивости оболочки является локальной, точнее она начинается выпучиванием в области, локализованной в малой окрестности некоторой точки поверхности F.

3. В геометрической теории устойчивости оболочек [2] задача определения критической нагрузки (ее асимптотики) сводится (согласно вариационному принципу "В") к отысканию значения нагрузки, при которой стационарен функционал W (асимптотики) полной энергии оболочки, который определен на нетривиальных, разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности F оболочки с разрывами непрерывности изгибающего поля $\mathbf{u}$ вдоль линии разрывов γ .

В [3] установлено, что условие стационарности функционала W в случае жестко закрепленной вдоль края оболочки при внешнем давлении P сводится к следующему равенству, определяющему асимптотическое значение критического давления:

$$\min_{(F)}\left(\hat{E}-\frac{P}{K}\right)=0, \tag{1}$$

где $\hat{E}=\dfrac{2F\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$, минимум берется по всем (внутренним) точкам срединной поверхности F (оболочки) вне малой окрестности ее края; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; δ – ее толщина.

При выводе условия (1) в [3] предполагалось, что линия разрывов γ – замкнутая и ограничивает область выпучивания G (вмятину) малых размеров, а величина разрывов изгибающего поля $\mathbf{u}$ отлична от нуля. Никаких дополнительных априорных предположений о форме линии γ и об изменяемости величины разрыва изгибающего поля вдоль γ не делалось (сравни с [2, 4]).

В случае равномерного внешнего давления для однородных оболочек постоянной толщины (когда P, $\hat{E}\equiv\mathrm{const}$) из (1) получаем известную формулу А. В. Погорелова ([2, 4]) для критического давления (его асимптотики):

$$P_*=\hat{E}\min_{(F)}K. \tag{2}$$

Формулы (1), (2) получены для оболочки жестко закрепленной вдоль ее края, поэтому [5] вектор смещений изгибающего поля $\mathbf{u}$, сообщающего стационарное значение функционалу W в принципе "В" равен нулю вдоль края ∂F срединной поверхности F оболочки. Но тогда [6] он равен нулю во всей области, прилегающей к краю ∂F , где изгибающее поле $\mathbf{u}$ непрерывно, т.е. вне области G, ограниченной линией разрыва γ изгибающего поля $\mathbf{u}$. Если же оболочка замкнутая, то изгибающее поле $\mathbf{u}$ вне области G, вообще говоря, не равно тождественно нулю. Поэтому, если оболочка замкнутая, поступаем следующим образом. Следуя [3], преобразуем выражение для функционала W полной энергии оболочки в вариационном принципе "В", ограничиваясь изгибающими полями $\mathbf{u}$, равными нулю вне области G. Тогда для критического давления вместо равенства (1) получим неравенство:

$$\min_{(F)}(\hat{E}-\frac{P}{K})\geqslant 0. \tag{3}$$

Из этого неравенства для замкнутой, однородной оболочки постоянной толщины $(E, \nu, \delta \equiv \mathrm{const})$, потеря устойчивости которой при равномерном внешнем давлении P $(P \equiv \mathrm{const})$ сопровождается (начинается) выпучиванием вмятины малых размеров (в области G), получаем следующую оценку для асимптотического значения P'_* критического давления

$$P'_* \leqslant P_*. \tag{4}$$

В [7] установлено, что непосредственно из вариационного принципа "B" (когда функционал W полной энергии определен на всевозможных допустимых формах изгибающего поля $\mathbf{u}$) вытекает следующее утверждение.

Для того, чтобы действующая на безмоментную выпуклую оболочку нагрузка стала критической (при локальной форме потери устойчивости вне окрестности края), необходимо, чтобы хотя бы в одной внутренней точке Q срединной поверхности оболочки было достигнуто равенство ([7]):

$$\min_{(F)} \left[\hat{E} + \frac{1}{K} \left(-P - \sqrt{P^2 - 4K \det(\mathrm{T}_\alpha^\beta)} \right) \right] = 0, \tag{5}$$

где минимум берется по всем внутренним точкам поверхности F; детерминант составлен из смешанных компонентов тензора усилий T_α^β $(\alpha, \beta = 1, 2)$ (определяемых по линейной безмоментной теории оболочек), возникающих в рассматриваемом (п. 2) докритическом безмоментном равновесном состоянии оболочки.

Линия γ разрывов изгибающего поля $\mathbf{u}$ проходит через точку Q (в определенном направлении [7]), где достигается минимум в (5). Если линия γ не замкнутая, продолжим ее до замкнутой, считая разрыв изгибающего поля $\mathbf{u}$ на этом продолжении равным нулю.

Заметим, что равенство (5) можно преобразовать и записать его в виде критерия устойчивости, полученного В. П. Ширшовым [8] при исследовании локальной устойчивости оболочки в окрестности внутренних точек ее срединной поверхности методом, обобщающим метод игнорирования форм выпучивания В. З. Власова [9]. К равенству (5) сводится также (полученное в результате асимптотического анализа уравнений теории анизотропных оболочек) условие ([5], см. (4.2)) в частном случае изотропных оболочек. Формулы (1), (3), (5) справедливы, вообще говоря, и в случае неоднородных оболочек при неравномерном нагружении (когда $E, \nu, \delta, P, \ldots \not\equiv \mathrm{const}$). Из условия (5) находим следующую формулу для асимптотического значения P_{**} критического давления при локальной потере устойчивости безмоментной, достаточно тонкой, строго выпуклой замкнутой оболочки при равномерном внешнем давлении(и $\hat{E} \equiv \mathrm{const}$).

$$P_{**} = \hat{E} \min_{(F)} \frac{K}{1 + \sqrt{1 - 4KP^{-2} \det(\mathrm{T}_\alpha^\beta)}}. \tag{6}$$

Заметим, что P_{**} не превышает критическое давление P'_* (4), при котором потеря устойчивости начинается выпучиванием вмятины малых размеров. Таким образом из вариационного принципа “В” геометрической теории оболочек получаем следующую оценку асимптотического значения критического давления:

$$P_{**} \leqslant \hat{E} \min_{(F)} K. \tag{7}$$

4. Дополним результаты, полученные в [10], следующей оценкой гауссовой кривизны.

Теорема. *Пусть K– гауссова кривизна замкнутой, строго выпуклой поверхности F с непрерывной кривизной и с диаметром не меньше D_0. Если поверхность F содержит шар радиуса не меньше R_0 ($0 < R_0 \leqslant D_0/2$), тогда справедлива оценка:*

$$\min_{(F)} K \leqslant K_0, \tag{8}$$

где минимум берется по всем точкам поверхности F, а $K_0 \equiv \mathrm{const}$ – гауссова кривизна замкнутой, выпуклой (веретенообразной) поверхности вращения F_0 с диаметром D_0 и с радиусом экваториального круга R_0. Если $R_0 = D_0/2$, то F_0 – сфера и в (8) можно получить равенство, приняв в качестве поверхности F сферу F_0. Если же $R_0 < D_0/2$, то неравенство (8) строгое, а K_0 – точная верхняя граница значений $\min K$, к которой можно подойти сколь угодно близко, беря поверхность F достаточно близкой к F_0 (например, закруглив F_0 в окресности ее особых двух точек).

Доказательство этой теоремы аналогично тому, как была доказана теорема 1 в [10].

5. Веретенообразная поверхность вращения F_0 выпукла, симметрична относительно своей экваториальной плоскости и имеет непрерывные нормальные кривизны всюду, кроме двух точек P_0, Q_0 – точек пересечения со своей осью вращения, где она имеет вершины (конические точки). Во всех остальных точках ее гауссова кривизна K_0 постоянна. Длина отрезка P_0, Q_0 равна диаметру D_0 поверхности F_0, то есть наибольшему расстоянию между любыми двумя ее точками. Обозначим через R_0 радиус экватора поверхности F_0 ($R_0 \leqslant 1/\sqrt{K_0}$). При $R_0 = 1/\sqrt{K_0}$ поверхность F_0 – сфера радиуса R_0.

Введем декартову систему координат (x, y, z), где координатная ось z – ось вращения поверхности F_0, а координатная плоскость (x, y) – ее экваториальная плоскость. Тогда уравнение меридиана $y = 0$ поверхности F_0 в параметрической форме можно записать в виде

$$x = R_0 \cos\sigma; \quad z = \int\limits_0^{\sigma} \sqrt{1/\mathrm{K}_0 - \mathrm{R}_0^2 \sin^2\sigma}\, \mathrm{d}\sigma; \quad |\sigma| \leqslant \pi/2, \tag{9}$$

где параметр $\sigma = 1/\sqrt{K_0}$; l – длина дуги меридиального сечения. Если поверхность F_0 разрезать по меридиану, то полученная поверхность при сближении точек P_0, Q_0 допускает геометрическое изгибание в кусок сферы радиуса $1/\sqrt{K_0}$, заключенный между двумя ее меридианами [11, 12].

Диаметр D_0 поверхности F_0 (согласно (9)) определяется по формуле:

$$D_0 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1/K_0 - R_0^2 \sin^2\sigma}\, d\sigma\,. \tag{10}$$

6. Таким образом из (7), (8), (10) получаем следующую оценку асимптотического значения P_{**} критического давления, при котором возможна локальная форма потери

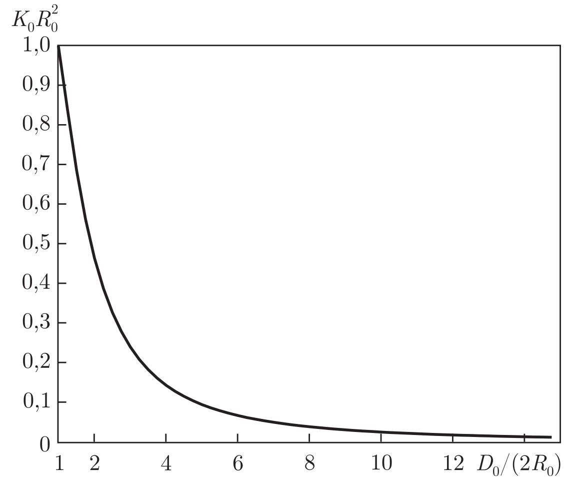

Рис. 1

устойчивости под действием равномерного внешнего давления рассматриваемых (см. п. 2) замкнутых, строго выпуклых оболочек, если срединная поверхность F оболочки имеет диаметр не меньше D_0 и существует содержащийся в F шар радиуса не меньше R_0

$$P_{**} \leqslant \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K_0 \,, \tag{11}$$

где K_0 – гауссова кривизна, которая при заданных значениях диаметра D_0 и радиуса R_0 определяется численно из уравнения (10). Результаты вычислений (рис. 1) показывают, как быстро уменьшается гауссова кривизна K_0 (а значит и оценка сверху асимптотического значения P_{**} критического давления) с увеличением диаметра D_0 при фиксированном значении радиуса R_0 шара, содержащегося в оболочке. Знак равенства в (11) имеет место для сферической оболочки.

Замечание. Существует две формы строго выпуклых поверхностей вращения F_0 с постоянной гауссовой кривизной K_0: веретенообразная (с радиусом экватора $R_0 \leqslant 1/K_0$) и сырообразная (с $R_0 > 1/K_0$) [12]. Первая из них (см. п. 5)использовалась при оценке сверху гауссовой кривизны общей (неканонической формы) строго выпуклой поверхности [10], а вторая – при оценке гауссовой кривизны снизу [13].

В обоих случаях уравнение меридиана $y=0$ (в координатах п. 5) имеет вид (9). Причем для сырообразной поверхности F_0 параметр σ в (9) изменяется в интервале, где подкоренное выражение не отрицательно, т.е. когда

$$-\frac{1}{R_0\sqrt{K_0}} \leqslant \sin\sigma \leqslant \frac{1}{R_0\sqrt{K_0}}.$$

В этом случае меридиан поверхности F_0 не доходит до оси вращения $x=0$ и заканчивается при

$$x = \sqrt{R_0^2 - 1/K_0},$$

где касательная к меридиану перпендикулярна к оси вращения, т.е. сырообразная поверхность F_0 незамкнутая и представляет собой пояс, окружающий ось вращения. Если пояс F_0 разрезать по меридиану, то его можно изогнуть на поверхность сферы радиуса $1/\sqrt{K_0}$ [12]. Если пояс F_0 дополнить до гладкой замкнутой поверхности, добавив два круга радиуса $\sqrt{R_0^2 - 1/K_0}$, то получим замкнутую, гладкую поверхность напоминающую по форме головку сыра [11].

Цитированная литература

1. *Бабенко В. И.* К оценке критического давления для строго выпуклой оболочки неканонической формы // Доп. НАН України.– 2009. – № 9. – С. 57–61.
2. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. – Москва: Наука, 1967. – 279 с.
3. *Бабенко В. И.* К геометрической теории потери устойчивости жестко закрепленных строго выпуклых оболочек при внешнем давлении // Докл. АН Украины.– 1993.– № 7. – С. 46–49.
4. *Погорелов А. В.* Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – Киев: Наук. думка, 1998. – 199 с.
5. *Бабенко В. И.* Потеря устойчивости непологих строго выпуклых анизотропных оболочек.// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977, № 2. – С. 95–103.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
7. *Бабенко В. И.* Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек // Укр. геометр. сб. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972.– Вып. 12. – С. 12–22.
8. *Ширшов В. П.* О локальной устойчивости оболочек // Прикл. механика. – 1966. – **2**, № 11.– С. 126–129.
9. *Власов В. З.* Избр. тр.: В 2 т. – Москва: Изд-во АН СССР, 1968. – Т. 1. – 528 с.
10. *Бабенко В. И.* К оценке гауссовой кривизны строго выпуклых поверхностей //Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 7–11.
11. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
12. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
13. *Бабенко В. И.* К оценке снизу гауссовой кривизны строго выпуклой, замкнутой поверхности // Доп. НАН України.– 2015. – № 3. – С. 7–10

References

1. *Babenko V. I.* Dopov. NAN Ukraine, 2009, No 9: 57–61 (in Russian).
2. *Pogorelov A. V.* Geometric methods in the nonlinear theory of elastic shells, Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
3. *Babenko V. I.* Dokl. Akad. Nauk Ukraine, 1993, No 7: 46–491 (in Russian).
4. *Pogorelov A. V.* Bending of surfaces and stability of shells, Kiev: Naukova Dumka, 1998 (in Russian).
5. *Babenko V. I.* Izvestiya AN SSSR.MTT, 1977, No 2: 95–103 (in Russian).
6. *Vekua I. N.* Generalized analytic functions, Pergamon Press, Oxford and Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
7. *Babenko V. I.* Ukranian geometric coll., Kharkov, Izdat. Kharkov. Gos. Univ, 1972, No 12: 12–22 (in Russian).
8. *Shirshov V. P.* Appl. Mech., 1966, 2, No 11: 126-129 (in Russian);
9. *Vlasov V. Z.* Selected works in 2 vol., vol.1. Moscow, Izdat. AN SSSR, 1968 (in Russian).
10. *Babenko V. I.* Dopov. NAN Ukraine, 2009, No 3: 7–11 (in Russian).
11. *Blascke W.* Circle and ball, Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
12. *Rashevskyi P. K.* Course of differential geometry, Moscow: GITTL, 1956 (in Russian).
13. *Babenko V. I.* Dopov. NAN Ukraine, 2015, No 3: 7–10 (in Russian).

Поступило в редакцию 12.02.2016

В.І. Бабенко, М.Д. Дунаєвська

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків
E-mail: babenko@ilt.kharkov.ua

До оцінки критичного тиску для замкненої, строго випуклої оболонки неканонічної форми

Одержана апріорна оцінка зверху асимптотичного значення критичного тиску для строго випуклої, замкненої оболонки неканонічної форми за двома її інтегральними параметрами: діаметру серединної поверхні, та радіусу шара, що міститься в оболонці.

Ключові слова: критичний тиск, строго випукла оболонка, неканонічна форма.

V.I. Babenko, M.D.Dunaieska

B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: babenko@ilt.kharkov.ua

On the estimation of the critical pressure for a closed strictly convex shell with non-canonical shape

An a priori upper bound of the asymptotic value of critical pressure for a closed strictly convex shell with non-canonical shape by its two integral parameters (diameter of the median surface and radius of the ball contained in the shell) is obtained.

Keywords: critical pressure, strictly convex shell, non-canonical shape.