ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2016

МАТЕМАТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.007

УДК 517.94

К.Н. Андреев

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков

E-mail: kirill.andreev@ukr.net

Интегралы движения уравнения Кортевега–де Фриза в классе решений типа ступеньки

(Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым)

Рассмотрена задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки. Построены регуляризованные интегралы движения и получено их представление через данные рассеяния соответствующего уравнения Шредингера.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза, интегралы движения, данные рассеяния.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \tag{1}$$

с вещественной начальной функцией $u_0(x)$ типа ступеньки

$$\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = c^2, \ c > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = 0. \tag{2}$$

В работе [1] доказано, что при соответствующем выборе начальной функции $u_0(x)$ задача (1), (2) имеет решения шварцевского типа, обладающие свойствами

$$\max_{|t|\le T} \int\limits_{-\infty}^{0} (1+|x|^m)\left|u(x,t)-c^2\right| dx < +\infty,$$

$$\max_{|t|\le T}\int\limits_{0}^{+\infty}(1+x^m)\,|u(x,t)|\,dx<+\infty,\quad t\ge 0, \tag{3}$$

$$\max_{|t|\le T}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^m)\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|dx<+\infty,\quad j=1,2...,\quad m=0,1,2,...,$$

при всех неотрицательных значениях T.

В работе [2] получено, что для решений $u(x,t)$ задачи (1), (2), обладающих свойствами (3), существует бесконечная серия регуляризованных интегралов движения $J_j[u]$, $j=1,2,3,...$. Первые три из них имеют вид

$$J_1[u]=\int\limits_{-\infty}^{0}\left(-u^2(\xi,t)+\frac{4}{3}c^2u(\xi,t)-\frac{1}{3}c^4\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\left(-u^2(\xi,t)+\frac{4}{3}c^2u(\xi,t)\right)d\xi,$$

$$J_2[u]=\int\limits_{-\infty}^{0}\Big(2u^3(\xi,t)-3c^4u(\xi,t)+u_\xi^2(\xi,t)+c^6\Big)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\Big(2u^3(\xi,t)-3c^4u(\xi,t)+u_\xi^2(\xi,t)\Big)d\xi,$$

$$J_3[u]=\int\limits_{-\infty}^{0}\Big(-5u^4(\xi,t)-10u(\xi,t)u_\xi^2(\xi,t)+8c^6u(\xi,t)-u_{\xi\xi}^2(\xi,t)-3c^8\Big)d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\Big(-5u^4(\xi,t)-10u(\xi,t)u_\xi^2(\xi,t)+8c^6u(\xi,t)-u_{\xi\xi}^2(\xi,t)\Big)d\xi.$$

При этом $J_2[u]$ играет роль гамильтониана, т.е. уравнение КдФ представимо в гамильтоновом виде

$$u_t=\frac{d}{dx}\frac{\delta J_2[u]}{\delta u},$$

где $\dfrac{\delta}{\delta u}$ – производная Фреше.

Цель настоящей работы – выразить интегралы движения через данные рассеяния оператора Шредингера с потенциалом типа ступеньки.

Как известно [3], уравнение КдФ эквивалентно в пространстве $H^5(\mathbb{R})$ уравнению Лакса $\partial_t L(t)=[P(t),L(t)]$, где

$$\begin{aligned}&L(t)=-\partial_x^2+u(x,t),\\&P(t)=-4\partial_x^3+6u(x,t)\partial_x+3u_x(x,t).\end{aligned} \tag{4}$$

Приведем необходимые сведения теории рассеяния для оператора Шредингера *L(t)* на всей оси с потенциалом типа ступеньки. Рассмотрим спектральное уравнение

$$(L(t)y)(x) = k^2 y(x), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $u(\cdot, t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = c^2, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0.$$

Такая задача рассеяния впервые исследовалась в [4], а также [5]. Полное решение этой задачи можно найти в [6]. Предположим, что потенциал *u(x,t)* достаточно быстро стремится к своим пределам, так что выполнено условие

$$\int_0^\infty (1+|x|)|u(x,t)| + |u(-x,t) - c^2|)dx < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Тогда справедливы следующие факты.

1. Уравнение (5) имеет два решения Йоста $\varphi(k,x,t)$ и $\varphi_1(k,x,t)$ с асимптотиками

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(k,x,t)e^{-\mathrm{i}kx} = 1, \quad \mathrm{Im}\,k \geqslant 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(k,x,t)e^{\mathrm{i}k_1 x} = 1, \quad \mathrm{Im}\,k_1 \geqslant 0,$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$ – спектральный параметр. Эти решения удовлетворяют соотношению рассеяния

$$T(k,t)\varphi_1(k,x,t) = \overline{\varphi(k,x,t)} + R(k,t)\varphi(k,x,t), \quad k \in \mathbb{R},$$

где $T(k,t), R(k,t)$ – правые коэффициенты прохождения и отражения.

2. Спектр оператора (4) состоит из абсолютно непрерывной части $\mathbb{R}_+$ и конечного числа отрицательных собственных значений $-\varkappa_1^2 < \ldots < -\varkappa_m^2 < 0$. Непрерывный спектр состоит из однократного $[0, c^2]$ и двукратного $[c^2; \infty)$. В терминах переменных k, k_1 непрерывный спектр соответствует значениям спектрального параметра $k \in \mathbb{R}$, а двукратный спектр – значениям $k_1 \in \mathbb{R}$.

3. Вронскиан $W(k,t) = \varphi_1(k,x,t)\varphi'(k,x,t) - \varphi_1'(k,x,t)\varphi(k,x,t)$ имеет простые нули в точках $\mathrm{i}\varkappa_l$. Кроме этого, единственно возможный нуль может быть в точке $k = 0$. Этот случай называется резонансом.

4. Решения $\phi(\mathrm{i}\varkappa_l, x, t)$ и $\phi_1(\mathrm{i}\varkappa_l, x, t)$ являются линейно зависимыми собственными функциями оператора (5). Соответствующие нормирующие константы

$$m_l = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi^2(\varkappa_l, x, t)dx\right)^{-1}, \; m_{l,1} = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1^2(\varkappa_l, x, t)dx\right)^{-1}.$$

5. Справедливо следующее тождество:

$$1 - |R(k,t)|^2 = \frac{k_1}{k}|T(k,t)|^2, \quad |k| > c. \tag{6}$$

6. Величина $|T(k,t)|$ не зависит от t при $k_1 \in \mathbb{R}$ [7], а при $k \in [-c; c]$

$$\arg\, T(k,t) = \arg\, T(k,0) - 4k^3 t. \tag{7}$$

Кроме того, $m_l(t) = m_l(0)e^{-8\varkappa_l^3 t}$.

7. Решение *u(x, t)* начальной задачи (1)–(3) может быть однозначно восстановлено по правым данным рассеяния $\{R(k,t), \mathrm{i}\varkappa_l, m_l, l = \overline{1,m}\}$.

8. Если $u(\cdot,t) \in C^n(\mathbb{R})$, то $R(k,t) = O(\frac{1}{k^{n+1}}),\ k \to \infty$.

Рассмотрим подробнее мероморфную функцию *T(k, t)*. Зная ее полюсы $\mathrm{i}\varkappa_l, l = \overline{1,m}$, в верхней полуплоскости можно определить функцию *A(k, t)*, которая аналитична при $\mathrm{Im}\ k > 0$ и не имеет там нулей:

$$A(k,t) = \frac{\mathrm{i}}{k_1} \log \Big[\prod_{l=1}^{m} \frac{k - \mathrm{i}\varkappa_l}{k + \mathrm{i}\varkappa_l} T(k,t) \sqrt{\frac{k_1}{k}} \Big].$$

При $\mathrm{Im}\ k > 0$ по теореме Коши справедливо интегральное представление через мнимую часть

$$A(k,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\ A(s,t)}{s-k} ds, \tag{8}$$

откуда, используя связь (6) и (7) коэффициентов прохождения *T(k, t)* и отражения *R(k, t)*, получаем представление подынтегральной функции $\mathrm{Im}\ A(k,t)$ в виде

$$\mathrm{Im}\ A(k,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt[+]{k^2-c^2}} \log(1 - |R(k,t)|^2), \quad k \in \mathbb{R}\backslash[-c;c], \\ \frac{1}{\sqrt[+]{c^2-k^2}} \left[\frac{1}{2} \arg\ R(k,t) + \arg\ \sqrt{\frac{k_1}{k}} + \sum_{l=1}^{m} \arg \frac{k - \mathrm{i}\varkappa_l}{k + \mathrm{i}\varkappa_l} \right], \quad k \in [-c;c], \end{cases} \tag{9}$$

где $\sqrt[+]{\ }$ – арифметический квадратный корень.

При $\mathrm{Im}\ k = 0$ доопределяем функцию *A(k, t)* как предел

$$A(k,t)\big|_{\mathrm{Im}\ k=0} = \lim_{\mathrm{Im}\ k \to +0} A(k,t)\big|_{\mathrm{Im}\ k>0}.$$

Тогда

$$T(k,t) = \sqrt{\frac{k}{k_1}} \prod_{l=1}^{m} \frac{k + \mathrm{i}\varkappa_l}{k - \mathrm{i}\varkappa_l} \exp\Big\{ -\mathrm{i}k_1 A(k,t) \Big\}. \tag{10}$$

Подставляя (8) в (10) и используя представление для мнимой части (9), получаем интегральное представление

$$\log T^{-1}(k,t) = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}}}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-c;c]} \frac{\log(1 - |R(s,t)|^2)}{\sqrt{s^2 - c^2}} \frac{ds}{1 - \frac{s}{k}} -$$

$$- \frac{\mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}}}{\pi} \int\limits_{-c}^{c} \left[\frac{1}{2} \arg\ R(s,t) + \arg\ \sqrt{\frac{\sqrt{s^2 - c^2}}{s}} + \sum_{l=1}^{m} \arg \frac{s - \mathrm{i}\varkappa_l}{s + \mathrm{i}\varkappa_l} \right] \frac{1}{\sqrt{c^2 - s^2}} \frac{ds}{1 - \frac{s}{k}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \left(\log\left(1 - \frac{\mathrm{i}\varkappa_l}{k}\right) - \log\left(1 + \frac{\mathrm{i}\varkappa_l}{k}\right) \right) + \log\sqrt{\frac{k_1}{k}}.$$

Учитывая эволюцию данных рассеяния (7) и связь коэффициентов отражения и прохождения (6), находим коэффициенты c_n разложения функции $\log\ T^{-1}(k,t)$ в ряд по степеням $(-2\mathrm{i}k)^n$:

$$\log\ T^{-1}(k,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(t)}{(-2\mathrm{i})^n}\frac{1}{k^n}.$$

Используя разложения Тейлора для $\sqrt{1-\dfrac{c^2}{k^2}}\dfrac{1}{1-(s/k)}$ и для $\log(1\pm(\mathrm{i}\varkappa_l/k))$ по степеням $(-2\mathrm{i}k)^n$ и учитывая, что $\mathrm{Im}\ A(k)$ нечетно при $k\in[-c;c]$, получаем при $j=1,2,...$

$$c_{2j-1}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-c;c]}\log\Big(1-|R(s,t)|^2\Big)\frac{(-1)^{j-1}2^{2j-2}d_{2j-1}(s)}{\sqrt{s^2-c^2}}ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\Big(\frac{1}{2}\arg\ R(s,t)+\arg\sqrt{\frac{\sqrt{s^2-c^2}}{s}}+\sum_{l=1}^{m}\arg\frac{s-\mathrm{i}\varkappa_l}{s+\mathrm{i}\varkappa_l}\Big)\frac{(-1)^{j-1}2^{2j-1}d_{2j-1}(s)}{\sqrt{c^2-s^2}}ds-$$

$$-\frac{2^{2j}}{2j-1}\sum_{l=1}^{m}\varkappa_l^{2j-1},$$

$$c_{2j}=\frac{(-1)^{j-1}(2c)^{2j}}{4j}.$$

где коэффициенты $d_{2j-1}(s),e_{2j-1,l}$ при $j=1,2,...$ можно найти исходя из соотношений

$$d_{2j-1}(s)=a_1(s)b_j+...+a_j(s)b_1,$$

а $a_p(s),\ b_p,\ p=\overline{1,j}$, находятся исходя из

$$a_p(s)=s^{2p-1},\quad b_p=\frac{(2p-2)!}{(3-2p)(p-1)!^2 4^{p-1}}c^{2(p-1)}.$$

Первые три коэффициента при соответствующих степенях выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{k^1}: d_1(s)=s,$$
$$\frac{1}{k^3}: d_3(s)=s^3-\frac{c^2}{2}s,$$
$$\frac{1}{k^5}: d_5(s)=s^5-\frac{c^2}{2}s^3-\frac{c^4}{8}s,$$
$$...$$

Отсюда следует, что можно выразить регуляризованные интегралы движения для постоянного фона через данные рассеяния. Первые два из них имеют вид:

$$J_1[u]=c_3(t)+\frac{4}{3}c^2c_1(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-c;c]}\log\Big(1-|R(s,t)|^2\Big)\frac{-4s^3+\frac{10}{3}c^2s}{\sqrt{s^2-c^2}}ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\Big(\frac{1}{2}\arg\ R(s,t)+\arg\sqrt{\frac{\sqrt{s^2-c^2}}{s}}+\sum_{l=1}^{m}\arg\frac{s-\mathrm{i}\varkappa_l}{s+\mathrm{i}\varkappa_l}\Big)\frac{-8s^3+\frac{20}{3}c^2s}{\sqrt{c^2-s^2}}ds+$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\Big(-\frac{16}{3}\varkappa_l^3+\frac{16}{3}c^2\varkappa_l\Big),$$

$$J_2[u]=c_5(t)-3c^4\cdot c_1(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-c;c]}\log\Big(1-|R(s,t)|^2\Big)\frac{16s^5-8c^2s^3-5c^4s}{\sqrt{s^2-c^2}}ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\Big(\frac{1}{2}\arg\ R(s,t)+\arg\sqrt{\frac{\sqrt{s^2-c^2}}{s}}+\sum_{l=1}^{m}\arg\frac{s-\mathrm{i}\varkappa_l}{s+\mathrm{i}\varkappa_l}\Big)\frac{32s^5-16c^2s^3-10c^4s}{\sqrt{c^2-s^2}}ds+$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\Big(-\frac{64}{5}\varkappa_l^5+9c^4\varkappa_l\Big).$$

В частном случае, при $c=0$, получаем результат работы [8].

Цитированная литература

1. *Egorova I., Teshl G.* On the Cauchy Problem for the Korteweg–de Vries Equation with Steplike Finite-Gap Initial Data II. Perturbations with Finite Moments // J. Anal. Math. – 2011. – **115**, No 1. – P. 71–101.
2. *Андреев К. Н., Хруслов Е. Я.* Регуляризованные интегралы движения уравнения Кортевега–де Фриза в классе неубывающих функций // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1587–1601.
3. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. – 1968.– **21**, No 2. – С. 467–490.
4. *Буслаев В. С., Фомин В. Н.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – **17**, № 1. – С. 56–64.
5. *Cohen A., Kappeler T.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**. – P. 127–180.
6. *Egorova I., Gladka Z., Lange T.-L., Teschl G.* Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2015. – **11**. – P. 123–158.
7. *Хруслов Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Матем. сб. – 1976. – **99**, № 2. – С. 261–281.
8. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега–де Фриса – вполне интегрируемая гамильтонова система // Функц. анализ и его прил. – 1971. – **5**, вып. 4. – С. 18–27.

References

1. *Egorova I., Teshl G.* J. Anal. Math., 2011, **115**: No 1: 71–101.
2. *Andreev K. N., Khruslov E. Ya.* Ukr. Mat. Zh., 2015, **67**: No 12: 1587–1601 (in Russian).
3. *Lax P. D.* Comm. Pure Appl. Math., 1968, **21**: No 2: 467–490.
4. *Buslaev V. S., Fomin V. N.* Vestn. Leningr. Univ., 1962, **17**: No 1: 56–64 (in Russian).
5. *Cohen A., Kappeler T.* Indiana Univ. Math. J., 1985, **34**: 127–180.
6. *Egorova I., Gladka Z., Lange T.-L., Teshl G.* J. Math. Phys., Anal., Geom., 2015, **11**: 123–158.
7. *Hruslov E. J.* Math. USSR Sb., 1976, **28**: No 2: 229–248.
8. *Zakharov V.E., Faddeev L.D.* Funct. Anal. Appl., 1971, **5**: No 4: 280–287.

Поступило в редакцию 09.03.2016

К. М. Андреєв

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків
E-mail: kirill.andreev@ukr.net

Інтеграли руху рівняння Кортевега–де Фріза в класі розв'язків типу сходинки

Розглянуто задачу Коші для рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинки. Побудовано регуляризовані інтеграли руху та отримано їх вираз через дані розсіювання відповідного рівняння Шредінгера.

Ключові слова: рівняння Кортевега–де Фріза, інтеграли руху, дані розсіювання.

K. M. Andreiev

B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: kirill.andreev@ukr.net

Integrals of motion of the Korteweg–de Vries equation in a class of steplike solutions

We study the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries with steplike initial data. The regilarized integrals of motion are constructed and expressed via associated scattering data of the Schrödinger equation.

Keywords: Korteweg–de Vries equation, integrals of motion, scattering data.