http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.046
УДК 532.5

Член-корреспондент НАН Украины **Н. В. Поляков, О. Г. Гоман, В. А. Катан**

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

E-mail: vlad_aleks@i.ua

К вопросу об ударном взаимодействии тела и жидкости со свободной поверхностью при наличии отрыва

Предлагается общий метод решения смешанных задач гидродинамического удара при наличии инерционного отрыва течения жидкости в плоской постановке с использованием аппарата сингулярных интегралов в смысле конечной части по Адамару.

Ключевые слова: отрыв течения, ударное взаимодействие, коэффициент присоединенной массы.

Исследуется задача об ударном взаимодействии твердого тела и жидкости со свободной поверхностью, общая постановка которой хорошо известна (см. [1–4]). Указанная проблема издавна изучается в Днепропетровском национальном университете им. Олеся Гончара как аналитическими, так и численными методами [5–12].

Постановка задачи. Пусть твердое цилиндрическое тело произвольного сечения располагается на свободной поверхности несжимаемой жидкости, находящейся первоначально в покое, и пусть система импульсных сил, приложенных к телу такова, что возникшее течение является плоскопараллельным. Рассмотрим любую плоскость поперечного сечения тела и примем ее за координатную плоскость декартовой системы xOy. Ось Oy направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а ось Ox расположим в плоскости свободной поверхности. Для простоты будем рассматривать случай, когда жидкость занимает всю полуплоскость $y \geqslant 0$, но в принципе, жидкость может быть ограничена произвольной твердой границей. Контур погруженной части тела обозначим через Г (рис. 1).

Предполагается, что ударный импульс действует так, что тело после удара получает положительную компоненту скорости вдоль оси $Oy - V_0$, а также некоторую компоненту скорости вдоль оси $Ox - U_0$ и угловую скорость вращения вокруг оси, перпендикулярной

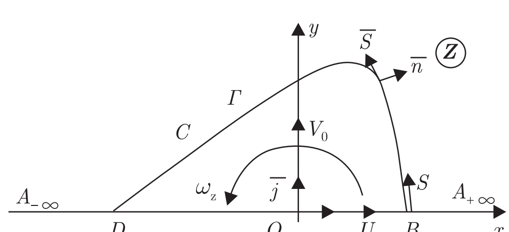

Рис. 1

плоскости Oxy, $\omega_z > 0$. Как известно [2], в подобной ситуации на некотором участке погруженной части контура DC может возникнуть отрыв, а остальная часть контура CB будет находиться в условиях безотрывного течения. Положение точки C на контуре Γ заранее неизвестно.

Возникшее сразу в результате удара течение жидкости будет потенциальным и для характеристической функции χ, связанной с комплексным потенциалом w соотношением

$$\chi = -iw = \psi - i\varphi,$$

($z = x + iy$ — комплексное переменное; $\varphi(x, y)$ — потенциал течения; $\psi(x, y)$ — функция тока) имеем смешанную задачу Келдыша–Седова: на участке границы CB безотрывного течения обтекания границы Γ задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re}\chi|_{CB} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2}(x^2 + y^2),$$

а на участках свободной границы $A_{-\infty}D$, DC, $BA_{+\infty}$ известна ее мнимая часть φ:

$$\operatorname{Im}\chi|_{A_{-\infty}D} = 0, \qquad \operatorname{Im}\chi|_{DC} = 0, \qquad \operatorname{Im}\chi|_{EA_{+\infty}} = 0.$$

С помощью аналитической функции $z = f(t)$ область течения конформно отобразим в полуплоскость $\operatorname{Im}\, t > 0$ переменной $t = \xi + i\eta$, с условием, чтобы граница области $A_{-\infty}DCBA_{\infty}$ перешла в действительную ось ξ, точка A перешла в бесконечность, точка B — в $\xi_B = 1$, точка D — в точку $\xi_D = -1$, пусть неизвестной точке C в плоскости t соответствует точка с координатой $\xi_C = -q$ $(-q > -1)$.

Для функции

$$\Theta(t) \equiv \chi(f(t)) = \psi - i\varphi$$

в верхней полуплоскости комплексной плоскости t имеем смешанную задачу Келдыша–Седова с такими граничными условиями: на участке границы $CB(-q, 1)$ задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re}\Theta|_{CB} \equiv \Pi(\xi) = \left[U_0 v(\xi) - V_0 u(\xi) - \frac{\omega_z}{2}(u^2(\xi) + v^2(\xi))\right], \tag{1}$$

где $u(\xi) = \operatorname{Re} f(\xi)$, $v(\xi) = \operatorname{Im} f(\xi)$, а на участках границы $A_{-\infty}D(-\infty, -1)$, $DC(-1, -q)$ и $BA_{+\infty}(1, +\infty)$ задана ее мнимая часть, равная нулю:

$$\operatorname{Im}\Theta|_{A_{-\infty}D} = 0, \qquad \operatorname{Im}\Theta|_{DC} = 0, \qquad \operatorname{Im}\Theta|_{BA_{+\infty}} = 0. \tag{2}$$

Решение поставленной задачи (1)–(2) в классе функций $\Theta(t)$, ограниченных в точках стыковки граничных условий различного типа, определяется формулой [13]

$$\Theta(t) = \frac{1}{\pi i} Z(t) \int\limits_{-q}^{1} \frac{\Pi(\xi)}{Z(\xi)(\xi - t)} d\xi, \tag{3}$$

где $Z(t) = \sqrt{(t + q)(t - 1)}$, а $Z(\xi)$ — значение функции $Z(t)$ при $t = \xi$, где $-q < \xi < 1$, т. е. $Z(\xi) = i\sqrt{(\xi + q)(1 - \xi)}$. Таким образом,

$$\Theta(t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{(t + q)(t - 1)} \int\limits_{-q}^{1} \frac{\Pi(\xi)}{\sqrt{(\xi + q)(1 - \xi)}(\xi - t)} d\xi. \tag{4}$$

Представив подынтегральную функцию в виде суммы

$$\Pi(\xi) = U_0\Pi_1(\xi) + V_0\Pi_2(\xi) + \omega_z\Pi_3(\xi), \tag{5}$$

где $\Pi_1(\xi) = v(\xi)$, $\Pi_2(\xi) = -u(\xi)$, $\Pi_3(\xi) = -(u^2(\xi) + v^2(\xi))/2$, решение поставленной задачи получаем в виде

$$\Theta(t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{(t+q)(t-1)}(U_0J_1(t) + V_0J_2(t) + \omega_zJ_3(t)), \tag{6}$$

где

$$J_k(t) = \int\limits_{-q}^{1} \frac{\Pi_k(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi - t}, \qquad k = \overline{1,3}. \tag{7}$$

Таким образом, если известно конформное отображение $z = f(t)$ области течения на верхнюю полуплоскость переменного t, то общее решение задачи об ударе (с одной зоной отрыва) представляется в форме квадратур (6), (7) в явном виде и содержит один неизвестный числовой параметр q, который определяет положение крайней точки C области отрыва DC.

Способ определения местоположения точки отрыва жидкости от гладкого контура. Одной из наиболее сложных проблем в ударных задачах с отрывом потока является как раз определение положения крайних точек зоны (или зон отрыва). В случае наличия только одной зоны отрыва DC для определения положения ее крайней точки C (т. е. параметра q) весьма конструктивным оказывается принцип Огазо [4], который состоит в следующем. Если известен потенциал $\varphi(t)$ на гладком участке безотрывного обтекания контура как функция $t = \xi + i0$, $\xi \in (-q, 1)$, то в точке $\xi = -q$ должно выполняться условие

$$\lim_{\xi \to -q+0} \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial q} = 0, \tag{8}$$

которое означает, что действительно реализуемое отрывное течение имеет экстремальный потенциал среди других возможных решений смешанной ударной задачи.

Условие (8) и приводит к искомому уравнению для определения параметра q. После предельного перехода в решении (4) из верхней полуплоскости t в точку ξ_0, принадлежащую отрезку CB $(-q < \xi_0 < 1)$ (с учетом формул Племеля–Сохоцкого [13]), приходим к следующему выражению для потенциала течения на участке безотрывного обтекания поверхности тела:

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}(U_0J_1(\xi_0) + V_0J_2(\xi_0) + \omega_zJ_3(\xi_0)), \tag{9}$$

где

$$J_k(\xi_0) = \int\limits_{-q}^{1} \frac{\Pi_k(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi - \xi_0}, \qquad k = \overline{1,3}, \ - \tag{10}$$

суть особые интегралы в смысле главного значения по Коши.

Применяя условие Огазо (8) к функции (9), получаем уравнение для определения параметра q в зависимости от безразмерных кинематических параметров $S = V_0/U_0$ и $\Lambda = \omega_z L/U_0$ (L — некоторый характерный линейный размер тела)

$$J_1(-q) + SJ_2(-q) + \Lambda \frac{1}{L} J_3(-q) = 0, \tag{11}$$

где особые интегралы вида

$$J_k(-q) = \int_{-q}^{1} \frac{\Pi_k(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi+q)^3(1-\xi)}}, \qquad k = \overline{1,3}, \tag{12}$$

которые при $\xi = -q$ имеют неинтегрируемую особенность порядка $(\xi + q)^{3/2}$, вследствие чего их следует понимать в смысле конечной части по Адамару [14–15]. Таким образом, для заданного контура погруженной части тела параметр q есть функция кинематических параметров S и Λ.

Распределение импульсивного давления и расчет коэффициентов присоединенных масс. После того как для заданных Λ и S из уравнения определено значение параметра q, распределение импульсного давления на поверхности твердого тела (в плоскости переменного t) находится по формуле

$$p_t = -\rho\varphi(\xi_0), \qquad \xi_0 \in (-q, 1),$$

где ρ — плотность жидкости, а потенциал $\varphi(\xi_0)$ определяется по соотношению (9), в котором все интегралы J_k (ξ_0) $(k = \overline{1,3})$ определяются как интегралы в смысле главного значения Коши при соответствующем значении q по известной численной стандартной процедуре [14–15].

Детально исследованы задачи об ударе с вращением пластинки, которая предварительно находится на свободной поверхности жидкости в горизонтальном, наклонном или вертикальном положении. Тщательно проанализированы зависимости параметра q, определяющего положение зоны отрыва от кинематических параметров, рассчитаны гидродинамические параметры и, в частности, присоединенные массы тела. Для случая вертикально плавающей пластинки результаты расчета сопоставлены с данными точного аналитического решения из [2], что показано на рис. 2. По результатам приведенного сопоставления следует вывод об успешности использования аппарата сингулярных интегралов в смысле конечной части по Адамару для разрешения проблемы определения местоположения точки отрыва. На рис. 3 представлены результаты расчета распределения импульсивного давления по поверхности наклонной пластинки, расположенной под различными углами к свободной поверхности жидкости: *а* — $\alpha = 60^\circ$, *б* — $\alpha = 30^\circ$.

Кроме распределенных гидродинамических характеристик определены суммарные характеристики, в частности, коэффициенты присоединенных масс в результате соответствующего интегрирования найденных функций тока и потенциала [2].

Таким образом, разработан общий подход к решению плоских гидродинамических ударных задач с отрывом потока с гладкого участка контура, который заключается в сведении таких задач путем конформного отображения к смешанной задаче Келдыша–Седова для некоторой характеристической аналитической функции в полуплоскости, общее решение

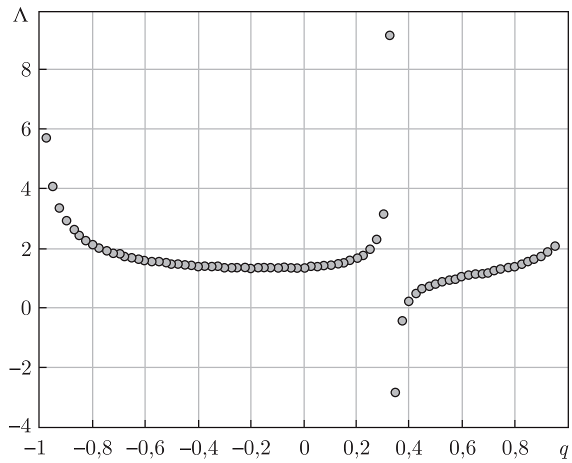

Рис. 2

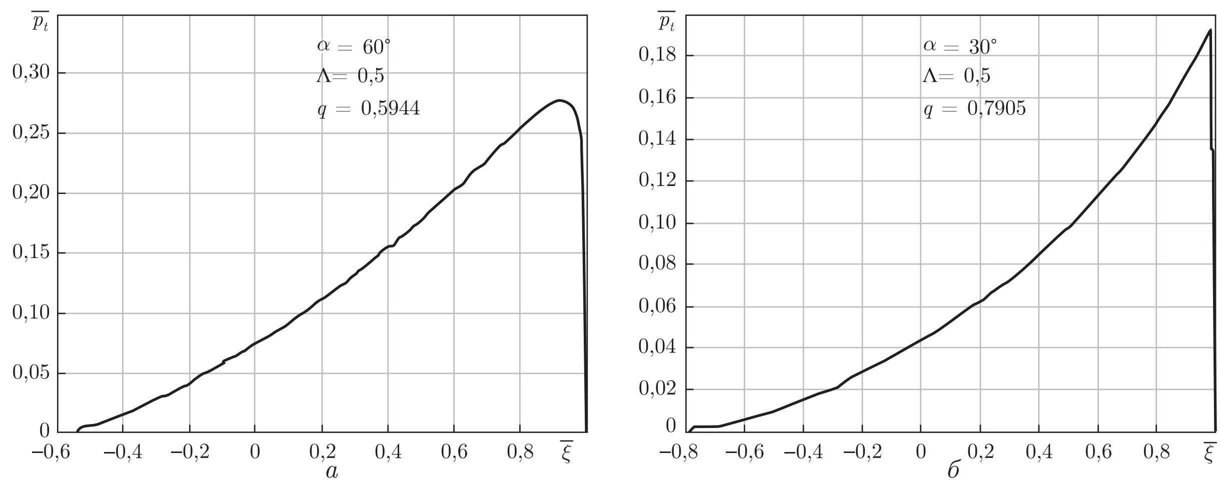

Рис. 3

которой в форме квадратур известно и содержит неизвестный числовой параметр, характеризующий положение точки отрыва.

Впервые для определения зависимости положения зоны отрыва от кинематических параметров тела в момент удара предложено использовать сингулярное трансцендентное уравнение, возникающее в результате применения принципа Огазо к общему решению задачи Келдыша–Седова и содержащее сингулярные квадратуры в смысле конечной части по Адамару. Разработан метод решения этого трансцендентного уравнения при помощи вычисления сингулярных интегралов в смысле конечной части по Адамару при помощи квадратурных формул Адамара–Манглера.

Цитированная литература

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Ленинград: Судостроение, 1976. – 200 с.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – Москва: Наука, 1980. – 448 с.
3. *Норкин М. В.* Смешанные задачи гидродинамического удара. – Ростов-на-Дону: Изд. ЦВВР, 2007. – 136 с.

4. *Моссаковский В. И., Рвачев В. Л.* К задаче о горизонтальном гидродинамическом ударе сферы // Прикл. мат и мех.. – 1958. – **22**, № 6. – С. 847–849.
5. *Гоман О. Г., Поляков Н. В.* Об одном применении метода граничных интегральных уравнений // Гидромех. и теория упругости. – 1975. – № 25. – С. 19–23.
6. *Поляков Н. В.* Решение начальной задачи погружения гладкого тела // Динам. и прочность тяж. машин. – 1980. – № 5. – С. 129–131.
7. *Гоман О. Г., Попов В. В.* Новый способ использования связи p-гармонических функций с аналитическими для решения задач теории потенциала // Докл. АН УССР. – 1981. – Сер. А. – № 4. – С. 36–38.
8. *Катан В. А.* Численный метод решения ударных задач гидромеханики. – Днепропетровск: ИДУ, 1984. – С. 1–21.
9. *Поляков Н. В.* Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания. – Днепропетровск: ИДУ, 2005. – 256 с.
10. *Поляков М. В.* Вибрані задачі механіки суцільного середовища. – Дніпропетровськ: ВДУ, 2006. – 320 с.
11. *Гоман О. Г., Катан В. А.* Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличии вращения // Вісн. ДНУ. Сер. Механіка. – 2013. – № 5(21). – Вип. 17, Т. 1. – С. 191–205.
12. *Катан В. А.* Об одном способе определения положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости // Вісн. ДНУ. Сер. Механіка. – 2014. – № 5(22). – С. 63–71.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
14. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – Москва: Наука. – 1978. – 352 с.
15. *Общая теория* аэродинамики больших скоростей / Под ред. У. Р. Сирса. – Москва: Воениздат, 1962. – 300 с.

References

1. *Grigoljuk E. I., Gorshkov A. G.* Interaction of elastic constructions and fluid (impact and immersion), Leningrad: Sudostroyenie, 1976 (in Russian).
2. *Sedov L. I.* Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics, Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
3. *Norkin M. V.* Mixed problems of the gydrodynamic impact, Rostov na Donu: Izd. CVVR, 2007 (in Russian).
4. *Mossakovskij V. I., Rvachev V. L.* Appl. Mat. Mech., 1958, **22**, No 6: 847–849 (in Russian).
5. *Goman O. G., Poljakov N. V.* Hudromechanics and elastic theory, 1975, No 25: 19–23 (in Russian).
6. *Poljakov N. V.* Dynamics and strength heavy machines, 1980, No 5: 129–131 (in Russian).
7. *Goman O. G., Popov V. V.* Dopov. AN UkrSSR Ser. A, 1981, No 4: 36–38 (in Russian).
8. *Katan V. A.* Numerical method of the solution for impact problems of hydrodynamic, Dnipropetrovsk: IDU, 1984: 1–21 (in Russian).
9. *Poljakov N. V.* The methods of the solution nonlinear boundary problems. Entry problems, Dnipropetrovsk: IDU, 2005 (in Ukrainian).
10. *Poljakov M. V.* The some problems of the continuum mechanics, Dnipropetrovsk: VDU, 2006 (in Ukrainian).
11. *Goman O. G., Katan V. A.* Visn. DNU. Ser. Mechanics, 2013, No 5(21): 191–205. (In Russian).
12. *Katan V. A.* Visn. DNU. Ser.: Mechanics, 2014, **22**, No 5: 63–72 (in Russian).
13. *Mushelishvili N. I.* Singular integral equations, Moscow: Nauka,1966 (in Russian).
14. *Hadamar G.* The Coshi's problem for linear partial differential hyperbolic equations, Moscow: Nauka,1978 (in Russian).
15. *General* theory aerodynamic of the superior speeds. By Y. R. Sirs's redaction, Moscow: Voenizdat, 1962 (in Russian).

Поступило в редакцию 01.02.2016

Член-кореспондент НАН України **М. В. Поляков, О. Г. Гоман, В. О. Катан**

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

E-mail: vlad_aleks@i.ua

До питання про ударну взаємодію тіла і рідини з вільною поверхнею за наявності відриву

Пропонується загальний метод розв'язання мішаних задач гідродинамічного удару за наявності інерційного відриву течії рідини в плоскій постановці з використанням апарату сингулярних інтегралів у сенсі скінченної частини за Адамаром.

Ключові слова: відрив течії, ударна взаємодія, коефіцієнт приєднаної маси.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **N. V. Polyakov, O. G. Goman, V. A. Katan**

Oles' Honchar Dnipropetrovsk National University

E-mail: vlad_aleks@i.ua

On the problem of impact interaction of a solid and a liquid with free surface under flow separation

A general method of solution to the mixed problems of hydrodynamic impact with the inertial flow separation of a liquid in a two-dimensional model with the use of the apparatus of singular integrals in sense of the Hadamard finite part is introduced.

Keywords: flow separation, impact interaction, coefficient of added mass.