Доповіді національної академії наук України

8 • 2016

МЕХАНІКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.033

УДК 539.3

А. Ю. Глухов

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: ndrewgl@gmail.com

Про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіподовжніх та квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення.

Ключові слова: шаруватий композитний стисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

Переважна частина досліджень процесів поширення хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями проводилася для повного контакту шарів. В реальності отримати композитний матеріал з ідеальним контактом на границях розділу шарів достатньо важко, оскільки при його виготовленні можуть виникати різного роду порушення адгезії. Оскільки в механіці доцільно давати нижню та верхню оцінки параметрам явищ, то важливим також буде розглянути другий крайній випадок контакту між шарами — повне проковзування.

В роботі [1] було проведено дослідження поширення плоских хвиль в шаруватому стисливому композитному матеріалі при проковзуванні шарів. В даній роботі розглядається аналогічна задача для вісесиметричних хвиль. Дослідження виконані в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями з використанням методу, викладеного в [2].

Постановка задач і метод досліджень. Розглядається шаруватий композитний стисливий матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат y_1, y_2, y_3 вибираємо таким чином, щоб вісь Oy_3 була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3.

Вважаємо початковий напружений стан однорідним. Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце такі співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \qquad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)};\\
&\varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}; \qquad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \qquad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \qquad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

В (1) і нижче індексами в дужках ($j = 1, 2$) позначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів. Тут $\sigma_{tt}^{0(j)}$, $S_{tt}^{0(j)}$ і $\varepsilon_{tt}^{0(j)}$ — складові тензора узагальнених напружень, тензора узагальнених напружень Лагранжа і тензора деформацій Гріна відповідно, $h^{(j)}$ і $h'^{(j)}$ — товщини j-го шару в природному і в початковому напружено-деформованому стані відповідно, $\lambda_t^{(j)}$ — коефіцієнти видовження уздовж відповідних вісей.

Як і в [2], приймаємо

$$
u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); \qquad u_\theta^{(j)} = 0; \qquad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau). \tag{2}
$$

У цьому випадку в представленні загального розв'язку вісесиметричної задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$
\Psi'^{(j)} \equiv 0; \qquad \chi'^{(j)} = \chi'^{(j)}(r', y_3, \tau). \tag{3}
$$

Враховуючи (3), для визначення переміщень $u^{(j)}$ і складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \mathrm{const}$ отримаємо вирази

$$
\begin{aligned}
&u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3}\chi'^{(j)}; \qquad \Delta_1' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'};\\
&u_3^{(j)} = (\omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)})^{-1}\left(\omega_{1111}'^{(j)}\Delta_1' + \omega_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\chi'^{(j)};
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
Q_{3r'}'^{(j)} = (\omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)})^{-1}\left(\omega_{1111}'^{(j)}\omega_{1313}'^{(j)}\Delta_1' + \omega_{1133}'^{(j)}\omega_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega_{1313}'^{(j)}\varrho'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\frac{\partial}{\partial r'}\chi'^{(j)};
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{33}'^{(j)} = (\omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)})^{-1}\Big\{&[\omega_{1111}'^{(j)} + \omega_{3333}'^{(j)} - \omega_{1133}'^{(j)}(\omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)})]\Delta_1' +\\
&+ \omega_{3333}'^{(j)}\omega_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega_{3333}'^{(j)}\varrho'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\Big\}\frac{\partial}{\partial y_3}\chi'^{(j)}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Для визначення функцій $\chi'^{(j)}$ за умови (3) маємо рівняння

$$\begin{aligned}&\left\{\omega'^{(j)}_{1111}\omega'^{(j)}_{1331}\left(\Delta'_1+\xi_2'^{(j)2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\Delta'_1+\xi_3'^{(j)2}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)-\varrho'^{(j)}\left[(\omega'^{(j)}_{1111}+\omega'^{(j)}_{1331})\Delta'_1+\right.\right.\\&\left.\left.+(\omega'^{(j)}_{3333}+\omega'^{(j)}_{3113})\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\varrho'^{(j)2}\frac{\partial^4}{\partial\tau^4}\right\}\chi'^{(j)}=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Величини $\xi_2'^{(j)2}$ і $\xi_3'^{(j)2}$ в (6) визначаються так, як в [2]; $\varrho'^{(j)}$ — щільність матеріалів кожного з шарів в початковому напружено-деформованому стані.

Таким чином, відповідно до викладеного, дослідження закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (6) при задоволенні граничних умов на площинах розділу шарів і умов періодичності Флоке.

Розглянемо поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямку. Аналогічно [2] для визначення "істинної" фазової швидкості поширення вісесиметричних хвиль приймемо

$$\chi'^{(j)}(r',y_3,\tau)=\chi'^{(j)(0)}(y_3)H_0^{(1)}(r'k)e^{-i\omega\tau};\qquad C=\omega k^{-1};\qquad j=1,2.\tag{7}$$

Тут k і ω — хвильове число і кругова частота; C — "істинна" фазова швидкість вісесиметричних хвиль; $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля нульового порядку першого роду; $\chi'^{(j)(0)}$ — амплітудна функція. Надалі індексом (0) будемо позначати всі амплітудні величини в представленнях типу (7).

Підставляючи (7) в (4), для визначення амплітуд переміщень отримаємо вирази

$$\begin{aligned}&u^{(j)(0)}_{r'}=-\frac{d}{dy_3}\chi'^{(j)(0)}(y_3);\\&u^{(j)(0)}_3=(\omega'^{(j)}_{1133}+\omega'^{(j)}_{1313})^{-1}\left(\omega'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}+\omega^2\varrho'^{(j)}-k^2\omega'^{(j)}_{1111}\right)\chi'^{(j)(0)}(y_3).\end{aligned}\tag{8}$$

Аналогічно, підставляючи (7) в (5), для визначення амплітуд складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3=\text{const}$ маємо

$$\begin{aligned}&Q'^{(j)(0)}_{3r'}(y_3)=(\omega'^{(j)}_{1133}+\omega'^{(j)}_{1313})^{-1}\left(\omega'^{(j)}_{1133}\omega'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}+\omega^2\omega'^{(j)}_{1313}\varrho'^{(j)}-k^2\omega'^{(j)}_{1111}\omega'^{(j)}_{1313}\right)\times\\&\qquad\times\chi'^{(j)(0)}(y_3);\\&Q'^{(j)(0)}_{33}(y_3)=(\omega'^{(j)}_{1133}+\omega'^{(j)}_{1313})^{-1}\left\{\omega'^{(j)}_{3333}\omega'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}+\omega^2\omega'^{(j)}_{3333}\varrho'^{(j)}-\right.\\&\qquad\left.-k^2[\omega'^{(j)}_{1111}+\omega'^{(j)}_{3333}-\omega'^{(j)}_{1133}(\omega'^{(j)}_{1133}+\omega'^{(j)}_{1313})]\right\}\frac{d}{dy_3}\chi'^{(j)(0)}(y_3).\end{aligned}\tag{9}$$

Підставляючи (7) в (6), отримаємо рівняння для визначення функцій $\chi'^{(j)(0)}(y_3)$ у формі

$$\begin{aligned}&\left\{\omega'^{(j)}_{1111}\omega'^{(j)}_{1331}\left(\xi_2'^{(j)2}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)\left(\xi_3'^{(j)2}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)+\omega^2\varrho'^{(j)}\left[(\omega'^{(j)}_{3333}+\omega'^{(j)}_{3113})\frac{d^2}{dy_3^2}-\right.\right.\\&\left.\left.-k^2(\omega'^{(j)}_{1111}+\omega'^{(j)}_{1331})\right]+\omega^4\varrho'^{(j)2}\right\}\chi'^{(j)(0)}(y_3)=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Оскільки в (7)–(10) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. При проковзуванні шарів при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови:

$$
\begin{aligned}
&u_3^{\prime(1)(0)}(0) = u_3^{\prime(2)(0)}(0); \qquad Q_{33}^{\prime(1)(0)}(0) = Q_{33}^{\prime(2)(0)}(0);\\
&Q_{3r'}^{\prime(1)(0)}(0) = 0; \qquad Q_{3r'}^{\prime(2)(0)}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Відповідно до теореми Флоке також повинні ще виконуватися умови:

$$
\begin{aligned}
&u_3^{\prime(1)(0)}(h^{(1)}) = u_3^{\prime(2)(0)}(-h^{(2)}); \qquad Q_{33}^{\prime(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{33}^{\prime(2)(0)}(-h^{(2)});\\
&Q_{3r'}^{\prime(1)(0)}(h^{(1)}) = 0; \qquad Q_{3r'}^{\prime(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Таким чином, в розглянутому випадку для стисливого матеріалу необхідно знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння (10), що задовольняє умови (11) і (12) з урахуванням формул (8) і (9).

Хвилі вздовж стисливих шарів. Довгохвильове (низькочастотне) наближення. За аналогією з результатами, викладеними в [2], розв'язок рівняння (10) представимо в такій формі:

$$
\begin{aligned}
&\chi^{\prime(j)(0)}(y_3) = \sum_{m=1}^{4} B_m^{(j)} e^{ik\alpha_\theta^{(j)}[y_3+(-1)^j h^{\prime(j)}/2]};\\
&\theta = \delta_{1m} + \delta_{2m} + 2(\delta_{3m} + \delta_{4m}); \qquad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Тут $\alpha_1^{(j)2}$ и $\alpha_2^{(j)2}$ — корені характеристичного рівняння звичайного диференціального рівняння (10).

У даному випадку вихідну задачу можна розділити на дві незалежні задачі: квазіподовжня хвиля, що розповсюджується уздовж осі Or'; квазіпоперечна хвиля, що поширюється уздовж осі Or' і поляризована в площині $r'Oy_3$. Зміст термінів "квазіподовжня хвиля" і "квазіпоперечна хвиля" викладений у монографії [2].

Квазіподовжня хвиля уздовж осі Or'. Для розглянутого випадку в (13) приймемо такі залежності:

$$
B_1^{(j)} = -B_2^{(j)}; \qquad B_3^{(j)} = -B_4^{(j)}. \tag{14}
$$

За умови (14) з (8) і (13) випливає, що $u_{r'}^{(j)}$ будуть симетричними і $u_3^{(j)}$ будуть антисиметричними щодо середини відповідних шарів.

Враховуючи (8) і (9) і підставляючи (13) і (14) в умови (11) і (12), після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних рішень якої слідує дисперсійне рівняння у вигляді

$$
\sum_{m=1}^{2} \Big\{ \omega_{3113}^{\prime(n)}(C_{lr'}^2 \varrho^{\prime(n)} - \omega_{1111}^{\prime(n)})(\alpha_2^{(n)2} - \alpha_1^{(n)2})(\omega_{1313}^{\prime(n)} - \omega_{1133}^{\prime(n)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k\alpha_1^{(n)} h^{\prime(n)} \times
$$

$$
\times \operatorname{tg} \frac{1}{2} k\alpha_2^{(n)} h^{\prime(n)} \Big\{ \alpha_1^{(m)} [\omega_{3333}^{\prime(m)}(C_{lr'}^2 \varrho^{\prime(m)} - \omega_{1111}^{\prime(m)}) + \omega_{1133}^{\prime(m)}(\omega_{1133}^{\prime(m)} + \omega_{1313}^{\prime(m)}) -
$$

$$
\begin{aligned}
&- \alpha_1^{(m)2}\omega'^{(m)}_{3333}\omega'^{(m)}_{3113}][\omega'^{(m)}_{1313}(C^2_{lr'}\varrho'^{(m)} - \omega'^{(m)}_{1111}) - \alpha_2^{(m)2}\omega'^{(m)}_{1133}\omega'^{(m)}_{3113}] \operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_2^{(m)}h'^{(m)} - \\
&- \alpha_2^{(m)}[\omega'^{(m)}_{3333}(C^2_{lr'}\varrho'^{(m)} - \omega'^{(m)}_{1111}) + \omega'^{(m)}_{1133}(\omega'^{(m)}_{1133} + \omega'^{(m)}_{1313}) - \alpha_2^{(m)2}\omega'^{(m)}_{3333}\omega'^{(m)}_{3113}] \times \\
&\times [\omega'^{(m)}_{1313}(C^2_{lr'}\varrho'^{(m)} - \omega'^{(m)}_{1111}) - \alpha_1^{(m)2}\omega'^{(m)}_{1133}\omega'^{(m)}_{3113}] \operatorname{tg}\frac{1}{2}k\alpha_1^{(m)}h'^{(m)}\Big\}\Big\} = 0; \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
n = 1, 2; \qquad m \neq n,
$$

де $C^2_{lr'} = \omega k^{-1}$ — швидкість квазіподовжньої хвилі у напрямку осі Or'.

Для довгохвильового наближення отримаємо

$$
\begin{aligned}
&h'^{(2)}(\omega'^{(2)}_{1313} - \omega'^{(2)}_{1133})(C^2_{lr'}\varrho'^{(2)} - \omega'^{(2)}_{1111})[\omega'^{(1)}_{3333}(\omega'^{(1)}_{1313} - \omega'^{(1)}_{1133})(C^2_{lr'}\varrho'^{(1)} - \omega'^{(1)}_{1111}) - \\
&- \omega'^{(1)2}_{1133}(\omega'^{(1)}_{1133} + \omega'^{(1)}_{1313})] + h'^{(1)}(\omega'^{(1)}_{1313} - \omega'^{(1)}_{1133})(C^2_{lr'}\varrho'^{(1)} - \omega'^{(1)}_{1111}) \times \qquad (16) \\
&\times [\omega'^{(2)}_{3333}(\omega'^{(2)}_{1313} - \omega'^{(2)}_{1133})(C^2_{lr'}\varrho'^{(2)} - \omega'^{(2)}_{1111}) - \omega'^{(2)2}_{1133}(\omega'^{(2)}_{1133} + \omega'^{(2)}_{1313})] = 0.
\end{aligned}
$$

З виразу (16) випливає, що для квазіподовжньої хвилі існують дві швидкості поширення. При $h'^{(2)} \ll h'^{(1)}$ отримаємо

$$
C^2_{lr',1} = \frac{\omega'^{(1)}_{1111}}{\varrho'^{(1)}}; \qquad C^2_{lr',2} = \frac{\omega'^{(2)}_{1111}}{\varrho'^{(2)}} + \frac{\omega'^{(2)2}_{1133}(\omega'^{(2)}_{1133} + \omega'^{(2)}_{1313})}{\varrho'^{(2)}\omega'^{(2)}_{3333}(\omega'^{(2)}_{1313} - \omega'^{(2)}_{1133})}. \qquad (17)
$$

При $h'^{(2)} \gg h'^{(1)}$ маємо

$$
C^2_{lr',1} = \frac{\varrho'^{(2)}}{\omega'^{(2)}_{1111}}; \qquad C^2_{lr',2} = \frac{\omega'^{(1)}_{1111}}{\varrho'^{(1)}} + \frac{\omega'^{(1)2}_{1133}(\omega'^{(1)}_{1133} + \omega'^{(1)}_{1313})}{\varrho'^{(1)}\omega'^{(1)}_{3333}(\omega'^{(1)}_{1313} - \omega'^{(1)}_{1133})}. \qquad (18)
$$

Відзначимо, що перші вирази у формулах (17) і (18) визначають швидкості поширення подовжніх хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

Квазіпоперечна (зсувна) хвиля уздовж осі Or', поляризована в площині $r'Oy_3$. Для розглянутого випадку в представленні розв'язку у формі (13) для двох сусідніх шарів приймемо такі залежності:

$$
B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \qquad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \qquad (19)
$$

За умови (19) з (8) і (13) випливає, що $u_{r'}^{(j)}$ будуть антисиметричними, а $u_3^{(j)}$ — симетричними відносно середини відповідних шарів.

Провівши ті ж перетворення, що і для квазіподовжньої хвилі, з урахуванням (19), отримаємо дисперсійне рівняння у вигляді, аналогічному (15) відносно $C^2_{Sy_3} = \omega k^{-1}$ — швидкості квазіпоперечної хвилі вздовж осі Or', поляризованої в площині $r'Oy_3$.

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією, отримаємо

$$C_{Sy_3}^2 = \{h'^{(1)}\varrho'^{(1)}\omega'^{(2)}_{3113}(\omega'^{(2)}_{1133} - \omega'^{(2)}_{1313})[\omega'^{(1)}_{3113}(\omega'^{(1)}_{1133} - 2\omega'^{(n)}_{1313}) - \omega'^{(1)}_{1313}\omega'^{(1)}_{3333}] +$$
$$+ h'^{(2)}\varrho'^{(2)}\omega'^{(1)}_{3113}(\omega'^{(1)}_{1133} - \omega'^{(1)}_{1313})[\omega'^{(2)}_{3113}(\omega'^{(2)}_{1133} - 2\omega'^{(2)}_{1313}) - \omega'^{(2)}_{1313}\omega'^{(2)}_{3333}]\}^{-1} \times$$
$$\times \{h'^{(1)}\omega'^{(2)}_{3113}(\omega'^{(2)}_{1133} - \omega'^{(2)}_{1313})[\omega'^{(1)}_{1313}(\omega'^{(1)}_{1133} + \omega'^{(1)}_{1313})(\omega'^{(1)}_{1133} + 2\omega'^{(1)}_{1313}) +$$
$$+ \omega'^{(1)}_{1331}\omega'^{(1)}_{3113}(\omega'^{(1)}_{1133} - 2\omega'^{(1)}_{1313}) - \omega'^{(1)}_{1111}\omega'^{(1)}_{3333}\omega'^{(1)}_{1313}] +$$
$$+ h'^{(2)}\omega'^{(1)}_{3113}(\omega'^{(1)}_{1133} - \omega'^{(1)}_{1313})[\omega'^{(2)}_{1313}(\omega'^{(2)}_{1133} + \omega'^{(2)}_{1313})(\omega'^{(2)}_{1133} + 2\omega'^{(2)}_{1313}) +$$
$$+ \omega'^{(2)}_{1331}\omega'^{(2)}_{3113}(\omega'^{(2)}_{1133} - 2\omega'^{(2)}_{1313}) - \omega'^{(2)}_{1111}\omega'^{(2)}_{3333}\omega'^{(2)}_{1313}]\}. \qquad (20)$$

Аналіз рівнянь (15), (16) і (20) свідчить, що при поширенні вісесиметричних хвиль при проковзуванні шарів відбувається взаємодія між шарами композиту.

Таким чином, в даній роботі досліджено поширення вісесиметричних хвиль у шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадок поширення хвиль уздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіподовжніх і квазіпоперечних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

Цитована література

1. *Панасюк О. М.* Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 65–70.
2. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.

References

1. *Panasyuk O. M.* Dopov. NAN Ukraine, 2010, No 1: 65–70 (in Ukrainian).
2. *Guz' A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A. S. K, 2004 (in Russian).

Надійшло до редакції 11.02.2016

А. Ю. Глухов

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: ndrewgl@gmail.com

О распространении осесимметричных волн в слоистых композитных сжимаемых материалах с начальными напряжениями при проскальзывании слоев

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрены постановка и метод решения задач о распространении осесимметричных волн в слоистых композитных сжимаемых предварительно напряженных материалах при проскальзывании слоев. Исследован случай распространения волн вдоль слоев. Получены дисперсионные уравнения для квазипродольных и квазипоперечных волн и их длинноволновое приближение.

Ключевые слова: слоистый композитный сжимаемый материал, начальные напряжения, упругие волны, дисперсионное уравнение, длинноволновое приближение.

A. Yu. Glukhov

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: ndrewgl@gmail.com

On the propagation of axisymmetric waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at the slipping of layers

Within the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the propagation of axisymmetric waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at the slipping of layers is investigated in the case of propagation along the layers. The dispersion equations for quasi-longitudinal and quasi-transversal waves and their long-wave approximations are obtained.

Keywords: laminated composite compressible material, initial stresses, elastic waves, dispersion equation, long-wave approximation.