http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.019

УДК 519.21

М. В. Танцюра

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: mtan@meta.ua

Про рівняння Маккіна–Власова з нескінченною масою

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. І. Портенком)

Розглянуто нескінченні системи стохастичних диференціальних рівнянь, що описують рух взаємодіючих частинок у випадковому середовищі. Доведено теореми існування та єдиності розв'язків. Також доведено граничну теорему для відповідних мірозначних процесів у випадку, коли маса кожної частинки прямує до нуля, а густота частинок зростає до нескінченності.

Ключові слова: мірозначні процеси, рівняння Маккіна–Власова.

У роботі розглядається узагальнення рівняння Маккіна–Власова на випадок коли сукупна маса взаємодіючих частинок є нескінченною. Рівняння Маккіна–Власова отримується таким чином: розглядається послідовність рівнянь, що задають рух скінченних систем взаємодіючих частинок у випадковому середовищі. При цьому маса кожної частинки прямує до нуля, а кількість частинок прямує до нескінченності таким чином, що сукупна маса частинок постійно дорівнює 1. Для послідовності розв'язків таких рівнянь доводиться гранична теорема, граничний випадковий процес є розв'язком рівняння Маккіна–Власова [1–3]. У даній роботі реалізовано такий план отримання рівняння Маккіна–Власова для випадку, коли розподіл мас частинок є локально скінченною мірою. Розглянуто теореми існування слабких розв'язків і теореми існування та єдиності сильних розв'язків для дограничних і граничних рівнянь. Також доведено граничну теорему, коли маса кожної частинки прямує до нуля, а сукупна маса збіжна до локально скінченної міри.

Нескінченні системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ з топологією τ грубої збіжності (див. [4]):

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R})\colon \int\limits_{\mathbb{R}} f d\nu_n \to \int\limits_{\mathbb{R}} f d\nu, \qquad n \to \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ — множина неперервних функцій з компактним носієм.

Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_k(t) = a(X_k(t), \mu(t))dt + b(X_k(t), \mu(t))dw_k(t), \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad t \in [0, T], \\ \mu(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $X_k(t)$ будемо інтерпретувати як положення k-ї частинки у момент часу t, міру $\mu(t)$ — як розподіл мас частинок у момент часу t, функції a та b відповідають за взаємодію частинок, u_k — як початкове положення k-ї частинки. Будемо вважати, що $\{u_k | k \in \mathbb{Z}\}$ — неспадна числова послідовність така, що $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = +\infty$, $\lim\limits_{k\to-\infty} u_k = -\infty$.

Зауваження 1. При доведенні результатів щодо рівняння (1) необхідно перевіряти, що для довільного $t \in [0,T]$ міра $\mu(t)$, визначена в другому рівнянні системи (1), є локально скінченною.

Теорема 1. *Припустимо, що a та b є обмеженими та неперервними за сукупністю змінних і існує стала $L > 0$ така, що*

$$\limsup_{m\to\infty} \mu(0,[-m,m])/m^L < \infty. \tag{2}$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (1).

Доведення теореми 1 достатньо стандартне і використовує доведення передкомпактності послідовності апроксимацій розв'язку та теорему Скорохода про спільний імовірнісний простір.

Позначимо

$$p_w(t,x) = P\Big(\sup_{s\in[0,t]} w(s) \geqslant x\Big) = 2\int\limits_{x\vee 0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-y^2/2t\right)dy, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

де w — вінерівський процес.

Має місце нижчеподана теорема існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (1).

Теорема 2. *Припустимо, що:*

1) функція a неперервна та обмежена:

$$\|a\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\nu\in\mathfrak{M}} |a(x,\nu)| < \infty;$$

2) функція b неперервна, обмежена та віддiлена від нуля:

$$\|b\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\nu\in\mathfrak{M}} |b(x,\nu)| < \infty, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \inf_{\nu\in\mathfrak{M}} |b(x,\nu)| > 0;$$

3) для довільного натурального n існує константа $C_{b,n}$ така, що для довільних x, y, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$ має місце нерівність

$$\left| b\left(x, \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}\right) - b\left(y, \sum_{k=1}^{n} \delta_{y_k}\right)\right| \leqslant C_{b,n}|x-y| + C_{b,n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|;$$

4) функції a та b мають властивість скінченності радіуса взаємодії:

$$\exists d > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \nu \in \mathfrak{M}\colon a(x,\nu) = a(x,\nu I_{(x-d,x+d)}), \qquad b(x,\nu) = b(x,\nu I_{(x-d,x+d)}),$$

де $(\nu I_B)(A) = \nu(\bigcap B)$, A, $B \in B(\mathbb{R})$;

5) існує невипадкова зростаюча послідовність $\{z_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ така, що:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to-\infty} z_n = -\infty$$

i

$$\exists r > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\colon \prod_{i\in\mathbb{Z}} (1 - 2p_w(T\|b\|_\infty, |z_n - u_i| - \|a\|_\infty T - d/2)) > r. \tag{4}$$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1).

Приклад 1. Для локально скінченної міри ν позначимо

$$\Lambda(\nu)\colon = \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu([-n, n])}{2n}.$$

Якщо $2\Lambda(\mu(0))d < 1$, то міра $\mu(0)$ задовольняє припущення 5 теореми 2.

Приклад 2. Нехай $\mu(0)$ — незалежна від $\{w_k | k \in \mathbb{Z}\}$ пуассонівська точкова міра з інтенсивністю m. Припустимо, що

$$\exists C_m \qquad \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \qquad m([\alpha, \beta]) \leqslant C_m(\beta - \alpha + 1).$$

Тоді з імовірністю 1 виконується припущення 5 теореми 2.

Характеризація граничних точок послідовності розв'язків нескінченних систем стохастичних диференціальних рівнянь. Для кожного $n \geqslant 1$ розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t), \mu^n(t))dt + dw_i(t), \qquad t \in [0, T], \qquad i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, \qquad t \in [0, T], \\ \mu^n(0) = \dfrac{1}{n}\mu^n. \end{cases} \tag{5}$$

Тут для довільного $n \in \mathbb{N}$ міра $\mu^n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{u_i^n}$ є пуассонівською точковою мірою з інтенсивністю $nm(dx)$, де m — деяка σ-скінченна міра, вінерівські процеси $\{w_i(\cdot), i \in \mathbb{Z}\}$ незалежні в сукупності і незалежні від $\{\mu^n | n \in \mathbb{N}\}$. Надалі скрізь будемо припускати, що m — міра на $\mathbb{R}$ така, що

$$\exists C_m \qquad \forall [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}\colon \quad m([\alpha, \beta]) \leqslant C_m(\beta - \alpha + 1). \tag{6}$$

Ми розглядаємо слабкі розв'язки (5) і не припускаємо, що розв'язок єдиний. Якщо функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних, то існування слабкого розв'язку випливає з теореми 1.

Нижчеподана лема дає достатні умови слабкої передкомпактності послідовності випадкових мірозначних процесів $\mu^n(\cdot)$ з рівнянь (5).

Лема 1. *Припустимо, що функція* $a\colon \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних і виконується співвідношення* (6). *Тоді послідовність* $\{\mu^n(\cdot), n \geqslant 1\}$ *є слабко відносно компактною як послідовність випадкових елементів в* $C([0, T], \mathfrak{M})$.

Для довільної міри λ та функції f позначимо

$$\langle \lambda, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx).$$

Позначимо через $C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ множину функцій $f=f(x,t)\colon \mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$, що є неперервно диференційовними за t і двічі неперервно диференційовними за x, для яких існує компактна множина $K\subset\mathbb{R}$ така, що $\operatorname{supp} f\subset K\times[0,T]$.

За формулою Іто для довільної $f\in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ маємо таке співвідношення:

$$d\langle f(\cdot,t),\mu^n(t)\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(f'_t(x,t)+f'_x(x,t)a(x,\mu^n(t))+\frac{1}{2}f''_{xx}(x,t)\right)\mu^n(t,dx)\,dt+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}f'_x(X_i^n(t),t)\,dw_i(t). \tag{7}$$

Спрямувавши $n\to\infty$ та обгрунтувавши граничний перехід в рівнянні (7) отримаємо такий результат.

Теорема 3. *Припустимо, що функція a обмежена та неперервна за сукупністю змінних і виконується співвідношення* (6)*. Нехай $\mu(\cdot)$ — довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot),n\geqslant 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0,T],\mathfrak{M})$. Тоді для довільної $f\in C_c^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$*

$$\langle\mu(t),f(\cdot,t)\rangle=\langle\mu(0),f(\cdot,0)\rangle+$$
$$+\int\limits_0^t\left\langle\left(f'_s(\cdot,s)+f'_x(\cdot,s)a(\cdot,\mu(s))+\frac{1}{2}f''_{xx}(\cdot,s)\right),\mu(s)\right\rangle ds,\qquad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Нехай $\varphi_{st}(x)$, $s\leqslant t$, $x\in\mathbb{R}$, — розв'язок рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_{st}(x)=a(\varphi_{st}(x),\mu(t))dt+dw(t), & t\in[s,T],\\ \varphi_{ss}(x)=x, \end{cases} \tag{9}$$

де $w(\cdot)$ — незалежний від $\mu(\cdot)$ вінерівський процес. Тут $\mu(\cdot)$ з теореми 3.

Позначимо $A(x,t)=a(x,\mu(t))$, E_w — математичне сподівання за вінерівською мірою.

Лема 2. *Нехай $\mu(t),t\geqslant 0$, визначено в теоремі 3. Припустимо, що виконані умови леми 1, функція $A(x,t)$ є диференційовною за x, причому функція $A'_x(x,t)$ обмежена. Якщо функція $g\in C_c^2(\mathbb{R})$, то для довільного фіксованого $S\in[0,T]$ функція f, що визначена рівністю*

$$f(t,x)=E_w g(\varphi_{tS}(x)),\qquad t\in[0,S], \tag{10}$$

задовольняє співвідношення

$$\forall t\in[0,S]\qquad \langle\mu(t),f(\cdot,t)\rangle=\langle\mu(0),f(\cdot,0)\rangle. \tag{11}$$

Ідея доведення. З теореми 1.12 в [5] маємо, що існує розв'язок рівняння

$$\begin{cases} f'_t(x,t)+f'_x(x,t)A(x,t)+\dfrac{1}{2}f''_{xx}(x,t)=0, & t\in[s,S),\qquad x\in\mathbb{R},\\ f(x,S)=g(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{12}$$

і з оберненого рівняння Колмогорова випливає, що розв'язок (12) задовольняє рівність (10). Якби функція f задовольняла умови теореми 3, то формула (11) випливала б з (8). Функція f не задовольняє умови теореми 3, оскільки не має компактного носія. Для доведення леми можна наблизити функцію f послідовністю функцій $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset C_c^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$ та обґрунтувати граничний перехід у рівнянні (8).

Позначимо $\lambda \circ f^{-1}$ образ міри λ при відображенні f.

Теорема 4. *Нехай $\mu(\cdot)$ — довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geqslant 1\}$, що розглядається як послідовність випадкових елементів простору $C([0,T], \mathfrak{M})$. Припустимо, що виконуються умови теореми 3 та леми 2. Позначимо $\varphi_t(x) = \varphi_{0t}(x)$, де $\varphi_{0t}(x)$ — розв'язок рівняння* (9). *Тоді*

$$\forall t \in [0,T] \qquad \mu(t) = E_w(m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}). \tag{13}$$

Зауваження 2. Функція $\varphi_t(x)$ вимірна за (t, x, ω).

Зауваження 3. Легко бачити, що $\mu^n(0) \xrightarrow{P} m$, $n \to \infty$, отже, $\mu(0) = m$.

Ідея доведення. Перетворивши (11), отримаємо, що для довільної функції $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ має місце рівність

$$\langle \mu(t), g(\cdot) \rangle = \langle E_w m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, g(\cdot) \rangle.$$

Звідси $\mu(t) = E_w(m \circ \varphi_t(\cdot)^{-1})$.

Рівняння Маккіна–Власова з нескінченною масою та гранична теорема. З теореми 4 випливає, що якщо $\mu(\cdot)$ є довільною слабкою граничною точкою послідовності $\{\mu^n(\cdot), n \geqslant 1\}$, то $\{\varphi_t(x), \mu(t), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x), \mu(t))dt + dw(t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,T], \\ \mu(t) = Em \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, \\ \varphi_0(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{14}$$

Позначимо

$$\mathfrak{M}_C = \{\mu \in \mathfrak{M} \colon \forall [a,b] \subset \mathbb{R} \colon \mu([a,b]) \leqslant C(b - a + 1)\}, \qquad \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0} \mathfrak{M}_C.$$

Теорема 5. *Припустимо, що:*

1) функція $a \colon \mathbb{R} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;

2) $\forall C > 0 \ \exists L_C > 0 \ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} |a(x_1, \mu) - a(x_2, \mu)| \leqslant C|x_1 - x_2|$;

3) $m \in \mathfrak{M}_\infty$.

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (14).

Ідея доведення теореми полягає в отриманні апріорних оцінок на розв'язки, наближенні рівняння (14) послідовністю рівнянь зі скінченною сукупною масою частинок, доведенні передкомпактності отриманої послідовності розв'язків, застосуванні теореми Скорохода про спільний імовірнісний простір та граничному переході.

Введемо клас функцій

$$Z = \{f \in C^2(\mathbb{R}) | \operatorname{supp} f \subset [-1,1], \, \|f\|_\infty \leqslant 1, \, \|f'\|_\infty \leqslant 1, \, \|f''\|_\infty \leqslant 1\}. \tag{15}$$

Введемо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu, \nu) = \sup_{r \in \mathbb{R}} \sup_{f \in Z} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x + r)(\mu(dx) - \nu(dx)) \right|.$$

Теорема 6. *Припустимо, що:*

1) функція $a\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2) $\forall C>0\ \exists L_C>0\ \forall\mu\in\mathfrak{M}_C\ \forall x_1,\ x_2\in\mathbb{R}\ |a(x_1,\mu)-a(x_2,\mu)|\leqslant L_C|x_1-x_2|$*;*

3) $\exists K>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall\mu,\ \nu\in\mathfrak{M}_\infty\ |a(x,\mu)-a(x,\nu)|\leqslant K\rho_\infty(\mu,\nu)$*;*

4) $m\in\mathfrak{M}_\infty$*.*

Тоді існує єдиний сильний розв'язок (14).

Для доведення теореми достатньо перевірити потраєкторну єдиність розв'язку та скористатись теоремою 5 та теоремою Ямада–Ватанабе.

Зауваження 4. Доведення теорем 5 та 6 справедливі і для рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x)=a(\varphi_t(x),\nu(t))dt+dw(t), \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad t\in[0,T],\\ \nu(t)=E_w m\circ\varphi_t(\cdot)^{-1},\\ \varphi_0(x)=x, \qquad x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{16}$$

отже, за припущень теореми 6 існують єдині сильні розв'язки рівнянь (14) та (16). Процес $\{\varphi_t(x),\ x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]\}$ з (14) є вимірним відносно вінерівської фільтрації, отже, пара $\{\varphi_t(x),\ \mu(t)),\ x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]\}$ також задовольняє рівняння (16). Тому розв'язки рівнянь (14) та (16) збігаються і з теореми 4 випливає, що довільна слабка гранична точка послідовності $\{\mu^n(\cdot),\ n\geqslant 1\}$ є невипадковою.

З теорем 4 та 6 випливає такий результат.

Теорема 7. *Нехай* $\{\mu^n(\cdot),X_i^n(\cdot),i\in\mathbb{Z}\}$ *— довільні розв'язки рівнянь* (5)*. Припустимо, що:*

1) функція $a\colon\mathbb{R}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ *є обмеженою та неперервною за сукупністю змінних;*

2) функція $a=a(x,\mu)$ *є неперервно диференційовною за* x*, причому*

$$\forall C>0 \qquad \exists L_C>0 \qquad \forall\mu\in\mathfrak{M}_C \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad |a'_x(x,\mu)|\leqslant L_C;$$

3) $\exists K>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall\mu,\ \nu\in\mathfrak{M}_\infty\ |a(x,\mu)-a(x,\nu)|\leqslant K\rho_\infty(\mu,\nu)$*;*

4) $m\in\mathfrak{M}_\infty$*.*

Тоді послідовність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot),n\geqslant 1\}\subset C([0,T],\mathfrak{M})$ *слабко збігається до мірозначного процесу* $\nu(\cdot)$*, який єдиним чином визначається з рівняння* (14)*.*

Приклад 3. Нехай,

$$a(x,\mu)=g_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2(y-x)\mu(dy)\right),$$

причому:

1) функція $g_1\in C^1(\mathbb{R})$, функції $g_1,\ g_1'$ є обмеженими;

2) функція $g_2\in C_c^1(\mathbb{R})$.

Для такої функції a виконані припущення всіх попередніх теорем.

Цитована література

1. *Sznitman A. S.* Topics in propagation of chaos // Ecole d'Ete de Probabilites de Saint–Flour XIX – 1989. – Berlin: Springer, 1991. – P. 165–251. – (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1464).
2. *McKean H. P.* A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1966. – **56**. – P. 1907–1911.

3. *Кас М.* Foundations of kinetic theory // Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Vol. 3. – Berkeley: Univ of Calif. Press, 1956. – P. 171–197.
4. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes // Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXI – 1991. – Berlin: Springer, 1993. – P. 1–260. – (Lecture Notes in Mathematics; Vol. 1541).
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
6. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Матем. сб. – 1980. – **111(153)**, № 3. – С. 434–452.
7. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216 с.

References

1. *Sznitman A.S.* Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XIX – 1989, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1464, Berlin: Springer, 1991: 165–251.
2. *McKean H.P.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1966, **56**: 1907–1911.
3. *Kac M.* Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., Vol. 3, Berkeley: Univ. of Calif. Press, 1956: 171–197.
4. *Dawson D. A.* Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XXI – 1991, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1541, Berlin: Springer, 1993: 1–260.
5. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
6. *Veretennikov A. J.* Mathematics of the USSR-Sbornik, 1981, **39**, No 3: 387–403.
7. *Skorokhod A.V.* Studies in the theory of random processes, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1965.

Надійшло до редакції 12.01.2016

М. В. Танцюра

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: mtan@meta.ua

Об уравнении Маккина–Власова с бесконечной массой

Рассмотрены бесконечные системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающие движение взаимодействующих частиц в случайной среде. Доказаны теоремы существования и единственности решений. Также доказана предельная теорема для соответствующих мерозначных процессов в случае, когда масса каждой частицы стремится к нулю, а плотность частиц возрастает к бесконечности.

Ключевые слова: мерозначные процессы, уравнение Маккина–Власова.

M. V. Tantsiura

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: mtan@meta.ua

On the McKean–Vlasov equation with infinite mass

We consider infinite systems of stochastic differential equations that describe the motion of interacting particles in a random environment. Theorems on existence and uniqueness of the solution are proved. We also obtain a limit theorem for corresponding measure-valued processes in the case where the mass of each particle tends to zero, and the density of particles grows to infinity.

Keywords: measure-valued processes, McKean–Vlasov equation.