Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2016

МАТЕМАТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.007

УДК 517.5

А. С. Ефимушкин

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

О многозначных решениях задачи Римана–Гильберта в многосвязных областях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Для уравнений Бельтрами в областях, ограниченных конечным числом гладких жордановых кривых, доказано существование многозначных решений задачи Римана–Гильберта с коэффициентами счетно-ограниченной вариации и граничными данными, измеримыми относительно логарифмической емкости. Показано, что пространства решений имеют бесконечную размерность.

Ключевые слова: уравнения Бельтрами, задача Римана–Гильберта, аналитические функции, многозначные решения, логарифмическая емкость.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. *Уравнением Бельтрами* в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные функции $f\colon D \to \mathbb{C}$ по x и y соответственно. Уравнение (1) называется *невырожденным*, если $\|\mu\|_\infty < 1$.

Краевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924) и Пуанкаре (1910). С историей вопроса можно ознакомиться в [1], а также [2], где рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Напомним только, что в 1904 г. Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта или *проблемой Римана–Гильберта.* Она состояла в доказательстве существования и нахождении аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой K, с граничным условием

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall \zeta \in K, \tag{2}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой K и что $|\lambda| \neq 0$ на K. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

В данной работе рассматриваются многозначные решения задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1) в духе теории многозначных аналитических функций. В связи с этим напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым в $\mathbb{C}$.

В дальнейшем говорим, что непрерывное, дискретное и открытое отображение $f\colon B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где круг $B(z_0, \varepsilon_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon_0\}$ лежит в области D, является *локальным регулярным решением уравнения Бельтрами* (1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и удовлетворяет (1) в $B(z_0, \varepsilon_0)$ п. в. Локальные регулярные решения $f_0\colon\ B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_*\colon B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (1) называются продолжениями друг друга, если существует конечная цепь таких локальных решений $f_i\colon B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \bigcap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, m-1$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j\colon B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения Бельтрами* (1) в D, если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j являются продолжениями друг друга через данную совокупность локальных решений, которая является максимальной по включению.

2. Определения и предварительные замечания.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом жордановых кривых. Функцию $\lambda\colon \partial D \to \mathbb{C}$ называем *функцией ограниченной вариации* на открытой дуге $\gamma \subset \partial D$, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\gamma)$, если

$$V_\lambda(\gamma) := \sup \sum_{j=0}^{k-1} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \tag{3}$$

где супремум берется по всем конечным наборам точек $\zeta_j \in \gamma$, $j = 0, 1, \ldots, k$, таким, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k-1$.

Далее, функцию λ называем *функцией счетно-ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{CBV}(\partial D)$, если найдется счетное число попарно непересекающихся открытых дуг $\gamma_n \subset \partial D$, на каждой из которых она является функцией ограниченной вариации, а множество $\partial D \setminus \bigcup \gamma_n$ счетно.

Следующая лемма является обобщением известной теоремы Каратеодори (см., например, теорему 9.4 в [4] и теорему II. С.1 в [5]). Доказательство можно найти в [6].

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, компонентами границы которой являются жордановы кривые, $\mathbb{D}_*$ — ограниченная, невырожденная круговая область в $\mathbb{C}$, пусть $\omega\colon D \to \mathbb{D}_*$ — конформное отображение. Тогда отображение ω может быть продолжено до отображения $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{D}_*}$.*

Напомним (см. [7]), что область D в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ называется *круговой*, если ее граница состоит из конечного числа взаимно непересекающихся окружностей и точек. Если граница этой области состоит только из окружностей, то называем эту область *невырожденной*.

Наконец, определение и основные свойства логарифмической емкости можно найти в [3] (см. также [1]).

3. Основные результаты. Следующая теорема дает решение задачи Римана–Гильберта в случае областей, ограниченных конечным числом гладких жордановых кривых. Напомним, что гладкие (и липшицевы) жордановы кривые являются квазиконформными, т. е. являются образами окружностей при квазиконформных отображениях $\mathbb{C}$ на себя (см., например, пункт II.8.10 в [9]).

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом гладких жордановых кривых, $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — измеримая функция с $\|\mu\|_\infty<1$, пусть $\lambda\colon\partial D\to\mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)|\equiv 1$ — функция класса $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D})$ и $\varphi\colon\partial D\to\mathbb{R}$ — функция, измеримая относительно логарифмической емкости. Тогда существует многозначное решение уравнения Бельтрами* (1), *которое удовлетворяет граничному условию* (2) *п. в. относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей.*

Действительно, продолжая μ нулем всюду вне D, получаем существование квазиконформного отображения $f\colon\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f(\infty)=\infty$, удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1) с таким образом продолженным μ (см., например, теорему V. B.3 в [8]). Рассмотрим $D^*=f(D)$. Область D^* допускает конформное отображение g на круговую область $\mathbb{D}_*$ (см., например, теорему V.6.2 в [7]). Заметим, что область $\mathbb{D}_*$ является невырожденной, поскольку изолированные особые точки конформного отображения являются устранимыми по теореме Вейерштрасса (см., например, теорему 1.2 в [4]).

Ясно, что $h:=g\circ f$ — квазиконформный гомеоморфизм, удовлетворяющий тому же самому уравнению Бельтрами (1). Заметим, что h допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{D}_*}$, поскольку g допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{D^*}$ на $\overline{\mathbb{D}_*}$ по лемме 1. Далее, по принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформные отражения (инверсии) относительно граничных окружностей в образе и квазиконформные отражения относительно квазиконформных кривых в прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения H некоторой окрестности U замыкания исходной области D на некоторую окрестность V замыкания круговой области $\mathbb{D}_*$ (см., например, I.8.4, II.8.2 и II.8.3 в [9]).

Отметим, что при этом $\Lambda:=\lambda\circ H^{-1}|_{\partial\mathbb{D}_*}$ принадлежит классу $\mathcal{CBV}(\partial\mathbb{D}_*)$. Кроме того, функция $\Phi=\varphi\circ H^{-1}|_{\partial\mathbb{D}_*}$ является измеримой относительно логарифмической емкости.

Действительно, логарифмическая емкость множества совпадает с его трасфинитным диаметром (см., например, пункт 110 в [10]). Поэтому при отображениях H и H^{-1} множества логарифмической емкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической емкости нуль на $\partial\mathbb{D}_*$ и наоборот, поскольку квазиконформные отображения являются непрерывными по Гельдеру на компактах (см., например, теорему II.4.3 [9]).

Таким образом, при отображениях H и H^{-1} любые множества, измеримые относительно логарифмической емкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической емкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической емкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми относительно логарифмической емкости.

Заметим также, что при квазиконформных отображениях H и H^{-1} искажение углов ограничено (см., например, [11]) и, следовательно, некасательные пути к ∂D переходят в некасательные пути к $\partial\mathbb{D}_*$ и наоборот.

Поэтому исходная задача Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1) сводится к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций F в круговых областях:

$$\lim_{w\to\eta} \mathrm{Re}\{\overline{\Lambda(\eta)}\cdot F(w)\} = \Phi(\eta) \tag{4}$$

для п. в. $\eta \in \partial\mathbb{D}_*$ относительно логарифмической емкости, а по теореме 1 в [12] существует многозначная аналитическая функция $F\colon \mathbb{D}_* \to \mathbb{C}$, для которой это условие выполняется для п. в. $\eta \in \partial\mathbb{D}_*$ относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей и, таким образом, искомое регулярное решение исходной задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1) существует и представимо в виде $f = F \circ H$.

Замечание 1. Как это следует из приведенной схемы доказательства, в теореме 1 условие гладкости граничных жордановых кривых можно заменить на более слабое условие квазиконформности и спрямляемости, однако тогда граничное условие (2) для найденного решения будет выполняться п. в. только относительно натурального параметра длины на граничных кривых, т. е. при этом ослабляется как условие, так и заключение теоремы.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 и замечания 1 пространства решений имеют бесконечную размерность.*

Последний результат является прямым следствием теоремы 3 в [12], а также конструкций решений в доказательстве теоремы 1.

Цитированная литература

1. *Ефимушкин А. С., Рязанов В. И.* О задаче Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в квазидисках // Укр. мат. вестник. – 2015. – **12**, № 2. – С. 190–209.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. *Носиро К.* Предельные множества. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 254 с.
4. *Коллингвуд Э., Ловатер Л.* Теория предельных множеств. – Москва: Мир, 1971. – 312 с.
5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – Москва: Мир, 1984. – 368 с.
6. *Ryazanov V. I.* On multivalent solutions of Riemann–Hilbert problem // arXiv: 1506.08735v1 [math. CV] 29 Jun. 2015. – 7 p.
7. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – Москва: Мир, 1969. – 134 с.
9. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. – 260 p.
10. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Москва: ОГИЗ, 1941. – 382 с.
11. *Agard S. B., Gehring F. W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3). – 1965. – **14A**. – P. 1–21.
12. *Ефимушкин А. С., Рязанов В. И.* О задаче Римана–Гильберта для аналитических функций в круговых областях // Доп. НАН України. – 2016. – № 2. – С. 13–16.

References

1. *Efimushkin A. S., Ryazanov V. I.* Ukr. mat. vestnik, 2015, **12**, No 2: 190–209 (in Russian).
2. *Vekua I. N.* Obobschennyie analiticheskie funktsii, Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
3. *Nosiro K.* Predelnyie mnozhestva, Moscow: Izd-vo Inostr. lit., 1963 (in Russian).
4. *Collingwood E. F., Lohwater A. J.* The theory of cluster sets, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No 56: Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
5. *Kusis P.* Vvedenie v teoriyu prostranstv H^p, Moscow: Mir, 1984 (in Russian).

6. *Ryazanov V. I.* On multivalent solutions of Riemann–Hilbert problem, arXiv:1506.08735v1 [math. CV] 29 Jun. 2015.
7. *Goluzin G. M.* Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo, Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
8. *Alfors L.* Lektsii po kvazikonformnyim otobrazheniyam, Moscow: Mir, 1969 (in Russian).
9. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal mappings in the plane, Berlin, Heidelberg: Springer, 1973.
10. *Nevanlinna R.* Odnoznachnyie analiticheskie funktsii, Moscow: OGIZ, 1941 (in Russian).
11. *Agard S. B., Gehring F. W.* Proc. London Math. Soc. (3), 1965, **14A**: 1–21.
12. *Efimushkin A. S. Ryazanov V. I.* Dopov. NAN Ukraine, 2016, No 2: 13–16 (in Russian).

Поступило в редакцию 14.12.2015

А. С. Єфімушкін

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

Про багатозначний розв'язок задачі Рімана–Гільберта для аналітичних функцій у кругових областях

Для рівнянь Бельтрамі в областях, обмежених скінченним числом гладких жорданових кривих, доведено існування багатозначних розв'язків задачі Рімана–Гільберта з коефіцієнтами зліченно-обмеженої варіації та граничними даними, що є вимірними відносно логарифмічної ємності. Показано, що простори розв'язків мають нескінченну розмірність.

Ключові слова: рівняння Бельтрамі, задача Рімана–Гільберта, аналітичні функції, багатозначні розв'язки, логарифмічна ємність.

A. S. Yefimushkin

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

On multivalent solutions of the Riemann–Hilbert problem in multiply connected domains

For the Beltrami equations in the domains bounded by a finite collection of smooth Jordan curves, the existence of multivalent solutions of the Riemann–Hilbert problem with coefficients of sigma–finite variation and with boundary data, which are measurable with respect to the logarithmic capacity, is proved. It is shown that these spaces of solutions have the infinite dimension.

Keywords: Beltrami equation, Riemann–Hilbert problem, analytic functions, multivalent solutions, logarithmic capacity.