

А. О. Камінський¹, Л. А. Кіпніс², Т. В. Поліщук²

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

²Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини

E-mail: dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

Про пластичні лінії розриву у кутовій точці кусково-однорідного тіла

(Представлено академіком НАН України В. Л. Богдановим)

Розглянуто симетричну задачу про розрахунок пластичних смуг у кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ. Пластична смуга моделюється лінією розриву дотичного переміщення. Точний розв'язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера–Хопфа. На основі цього розв'язку визначено довжину і напрямок розвитку пластичних смуг.

Ключові слова: пластична смуга, кутова точка, межа поділу середовищ, лінія розриву дотичного переміщення, метод Вінера–Хопфа.

Більшість праць, що присвячені плоским задачам про визначення вузьких зон передруйнування у рамках моделей з лініями розриву переміщення, відноситься до випадків, коли концентраторами напружень є кінці тріщин в однорідних тілах [1]. Низка досліджень, які проведено в указаному напрямі, стосується інших кутових точок однорідного тіла [2–4]. У випадку кусково-однорідних тіл зони передруйнування визначалися біля кінців міжфазних тріщин [5–7] та в кінці тріщини, що виходить на межу поділу середовищ [8, 9].

В [10, 11] здійснено розрахунки міжфазних зон передруйнування в кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ у випадках пружнопластичного і крихкого з'єднуючих матеріалів.

Нижче дано розв'язок задачі про визначення вузької пластичної зони передруйнування у кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ за умови, що частини кусково-однорідного тіла жорстко зчеплені.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне тіло, що складене з ізотропних пружнопластичних частин, які жорстко зчеплені між собою. Межа поділу середовищ не є гладкою, а містить кутові точки — гострокінцеві концентратори напружень. У відповідній статичній задачі теорії пружності при наближенні точки тіла до такої кутової точки межі поділу середовищ напруження прямують до нескінченності.

Зі зростанням зовнішнього навантаження біля кутової точки межі поділу середовищ, яка розглядається, з'являється і розвивається пластична зона. Вивчатимемо лише початкову стадію розвитку пластичної зони, коли її розмір значно менший, ніж розміри тіла, а задачу вважатимемо симетричною відносно бісектриси кута. Тоді пластична зона матиме вид пари симетричних вузьких смужок, що виходять з кутової точки та розташовані у більш пластичному матеріалі [12].

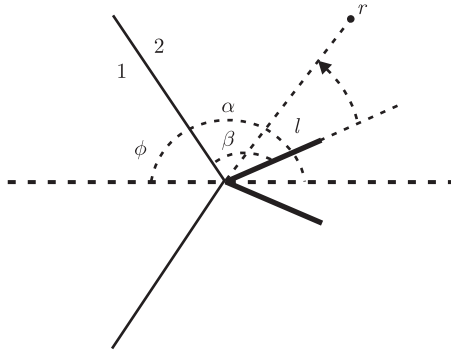


Рис. 1

Ставиться задача визначення довжини і напрямку розвитку початкових пластичних смуг.

Оскільки матеріал тіла є пружнопластичним, переважні деформації у пластичній зоні розвиваються за механізмом зсуву. Тому смужку-зону моделюватимемо прямою лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості на зсув.

З урахуванням малості пластичної зони приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить два прямолінійних розрізи скінченної довжини, що виходять з кутової точки під кутом до цієї межі (рис. 1).

На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без розрізів (задача К), що породжується єдиним на інтервалі $]-1; 0]$ коренем її характеристичного рівняння (воно наведене нижче). Довільна стала C , яка входить до цього розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатись з розв'язку зовнішньої задачі. Сталу C можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Беручи до уваги симетрію задачі теорії пружності, що розглядається (рис. 1), її крайові умови запишемо так:

$$\theta = \beta - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = \pi - \alpha + \beta, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0;$$

$$\theta = \beta, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cg(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3)$$

У цих формулах $\beta - \alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha + \beta$; $\langle a \rangle$ — стрибок a ; λ — єдиний на інтервалі $]-1; 0[$ корінь характеристичного рівняння задачі К:

$$\Delta(-x - 1) = 0, \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2, \\ \delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\chi_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned}\delta_1(z) &= (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\chi_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - \\ &\quad - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\chi_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha), \\ \delta_2(z) &= [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\chi_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha), \\ e &= \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \chi_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.\end{aligned}$$

Тут E_1, E_2 — модулі Юнга; ν_1, ν_2 — коефіцієнти Пуассона. Громіздкий вираз для відомої функції $g(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)$ не наводимо. При $\alpha = 0, \pi/2, \pi$ функція g дорівнює нулю. Якщо $Cg > 0$, то $\tau_1 = \tau$; якщо $Cg < 0$, то $\tau_1 = -\tau$ (τ — границя текучості на зсув матеріалу 2).

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (див. рис. 1) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (2) маємо

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^\lambda, \quad (4)$$

а на нескінченності напруження згасають як $o(1/r)$ (у (3) відсутній перший доданок). Друга задача — задача К. Оскільки розв'язок другої задачі відомий, достатньо побудувати розв'язок першої.

Для побудови точного розв'язку першої задачі будемо використовувати метод Вінера–Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [13].

Рівняння Вінера–Хопфа задачі. Застосовуючи перетворення Мелліна

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r)r^p dr$$

з комплексним параметром p до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука, умов (1) та враховуючи другу з умов (2) і умову (4), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера–Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = ctgp\pi G(p)\Phi^-(p),$$

$$G(p) = \frac{[n_0(p) + n_1(p)e + n_2(p)e^2] \sin p\pi}{[d_0(p) + d_1(p)e + d_2(p)e^2] \cos p\pi},$$

$$\begin{aligned}n_0(p) &= -2[\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \{[\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] \times \\ &\quad \times (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + 2[\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)](\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_1(p) &= [\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] \{2[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\chi_2 \sin 2p\beta - p \sin 2\beta) + \\ &\quad + 2[\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha](\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + \\ &\quad + (1 + \chi_1)(1 + \chi_2)[\cos 2p(\pi - \alpha + \beta) - \cos 2(\pi - \alpha + \beta)]\} - \\ &\quad - [\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] \{[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha][(1 + \chi_1)(1 + \chi_2) - \\ &\quad - 4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta)] - 4[\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha](\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta) - \\ &\quad - (1 + \chi_1)(1 + \chi_2)[\sin 2p(\pi - \alpha + \beta) + p \sin 2(\pi - \alpha + \beta)]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2(p) &= -[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \{ [\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] [4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta) - \\
&= (1 + \chi_2)^2] + 2[\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] (\chi_2 \sin 2p\beta - p \sin 2\beta) \}, \\
d_0(p) &= 2(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\
d_1(p) &= 2\{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - \\
&- [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \}, \\
d_2(p) &= 2[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau_2 = -Cgl^\lambda, \\
\Phi^+(p) &= \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_2}{4(1 - \nu_2^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho
\end{aligned}$$

Тут $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достатньо малі додатні числа.

Подібні рівняння розв'язано, наприклад, у [10, 11].

Визначення довжини і напрямку розвитку початкових пластичних смуг. Довжина пластичних смуг визначається з умови обмеженості напружень біля кінця лінії розриву дотичного переміщення.

Має місце наступна формула для визначення довжини l початкових пластичних смуг:

$$\begin{aligned}
l &= L \left(\frac{|C|}{\tau} \right)^{-1/\lambda}, \\
L &= \left[\frac{2|g|\Gamma(\lambda + 3/2)G^+(-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} \right]^{-1/\lambda}, \\
G^+(p) &= \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0),
\end{aligned}$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція.

Слідуючи [1, 2, 14], у якості кута нахилу пластичної смуги до межі поділу середовищ вибератимемо те значення β , при якому довжина пластичної смуги буде найбільшою. Вибраний таким чином кут визначає напрямок розвитку початкової пластичної смуги.

Так, якщо $E_1/E_2 = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, то значенням кута ϕ , що дорівнюють $(10j)^\circ$ ($j = 1, 2, \dots, 8$), відповідають значення кута β нахилу початкових пластичних смуг до межі поділу середовищ, що дорівнюють $29,4^\circ$; $15,7^\circ$; $6,1^\circ$; 0° ; $83,4^\circ$; $73,3^\circ$; $64,2^\circ$; $55,1^\circ$.

Цитована література

1. *Panasyyuk V. V., Savruk M. P.* Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // *Mater. Sci.* — 1992. — No 1. — P. 41–57.
2. *Berezhnitskii L. T., Kundrat N. M.* Origin and development of plastic strains in the neighborhood of an acute-angled rigid inclusion // *Mater. Sci.* — 1983. — No 6. — P. 538–546.
3. *Dyakon V. N., Kaminskii A. A., Kipnis L. A.* Initial plastic strips at the intersection of slip-lines // *Mech. of Solids.* — 1997. — No 3. — P. 100–105.
4. *Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A.* Analysis of the Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model // *Int. Appl. Mech.* — 2002. — **38**, No 5. — P. 611–616.

5. *Loboda V. V., Sheveleva A. E.* Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, No 5. – P. 566–572.
6. *Волошко О. І., Лобода В. В.* Дослідження зон передруйнування для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує ізотропні матеріали // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки.* – 2010. – Вип. № 4. – С. 54–59.
7. *Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А.* Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 95–108.
8. *Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A.* Model of the fracture process zone at the tip of a crack reaching the nonsmooth interface between elastic media // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No 10. – P. 1084–1092.
9. *Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V.* “Trident” Model of Plastic Zone at the End of a Mode I Crack Appearing on the Nonsmooth Interface of Materials // *Mater. Sci.* – 2014. – No 4. – P. 516–526.
10. *Kipnis L. A., Polishchuk T. V.* Analysis of the plastic zone at the corner point of interface // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No 2. – P. 159–168.
11. *Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Polishchuk T. V.* Initial fracture process zone at the corner point of the interface between elastic bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, No 6. – P. 700–709.
12. *Vitvitskii P. M., Panasyuk V. V., Yarema S. Ya.* Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture (Review) // *Strength of Materials.* – 1973. – No 2. – P. 135–151.
13. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
14. *Cherepanov G. P.* Plastic rupture lines at the tip of a crack // *Appl. Math. Mech.* – 1976. – **40**, No 4. – P. 666–674.

References

1. *Panasyuk V. V., Savruk M. P.* *Mater. Sci.*, 1992, No 1: 41–57.
2. *Berezhnitskii L. T., Kundrat N. M.* *Mater. Sci.*, 1983, No 6: 538–546.
3. *Dyakon V. N., Kaminskii A. A., Kipnis L. A.* *Mech. of Solids*, 1997, No 3: 100–105.
4. *Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A.* *Int. Appl. Mech.*, 2002, **38**, No 5: 611–616.
5. *Loboda V. V., Sheveleva A. E.* *Int. Appl. Mech.*, 2003, **39**, No 5: 566–572.
6. *Voloshko O. I., Loboda V. V.* *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series Physics & Mathematics*, 2010, No 4: 54–59 (in Russian).
7. *Kaminskii A. A., Dudyk M. V., Kipnis L. A.* *Math. Methods and Physicomech. Fields*, 2014, **57**, No 4: 95–108 (in Russian).
8. *Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A.* *Int. Appl. Mech.*, 2008, **44**, No 10: 1084–1092.
9. *Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V.* *Mater. Sci.*, 2014, No 4: 516–526.
10. *Kipnis L. A., Polishchuk T. V.* *Int. Appl. Mech.*, 2009, **45**, No 2: 159–168.
11. *Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Polishchuk T. V.* *Int. Appl. Mech.*, 2012, **48**, No 6: 700–709.
12. *Vitvitskii P. M., Panasyuk V. V., Yarema S. Ya.* *Strength of Materials*, 1973, No 2: 135–151.
13. *Noble B.* *Useng of the Wiener–Hopf method for the solve the Partial derivative equations*, Moscow: Izda-vo Inostr. lit., 1962 (in Russian).
14. *Cherepanov G. P.* *Appl. Math. Mech.*, 1976, **40**, No 4: 666–674.

Надійшло до редакції 27.12.2015

А. А. Каминский¹, Л. А. Кипнис², Т. В. Полищук²

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

²Уманский государственный педагогический университет им. Павла Тычины

E-mail: dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

О пластических линиях разрыва в угловой точке кусочно-однородного тела

Рассмотрена симметричная задача о расчете пластических полос в угловой точке границы раздела изотропных сред. Пластическая полоса моделируется линией разрыва касательного смещения. Точное решение соответствующей задачи теории упругости построено методом Винера–Хопфа. На основе этого решения определены длина и направление развития пластических полос.

Ключевые слова: пластическая полоса, угловая точка, граница раздела сред, линия разрыва касательного смещения, метод Винера–Хопфа.

A. A. Kaminsky¹, L. A. Kipnis², T. V. Polischuk²

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

²Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University

E-mail: dfm11@ukr.net, polischuk_t@ukr.net

On the plastic rupture lines at a corner point of the piecewise homogeneous body

The symmetric problem of calculation of plastic strips at a corner point of the interface of isotropic media is considered. The plastic strip is modeled by the line of rupture of a tangent displacement. An exact solution of the corresponding problem of elasticity theory is constructed by the Wiener–Hopf method. Basing on this solution, the length and the direction of development of plastic strips are determined.

Keywords: plastic strip, corner point, interface of media, line of rupture of a tangent displacement, Wiener–Hopf method.