



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.039>

УДК 620.172.224

**В. Н. Бастун, И. Ю. Подильчук**

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

*E-mail:* ipodil@voliacable.com

## Моделирование эффекта Баушингера в ортотропных материалах с изотропно-кинематическим упрочнением в условиях изотермического и неизотермического нагружения

*(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)*

*Рассматривается модель эффекта Баушингера в общем случае сложного напряженного состояния в материалах с деформационной анизотропией, упрочнение которых описывается гипотезой изотропно-кинематического типа, в условиях изотермического и неизотермического нагружений. Модель основана на использовании концепции поверхности нагружения и графо-аналитического метода, устанавливающего связь между напряжениями и деформациями при сложном нагружении. В качестве примера численно определена мера эффекта Баушингера в ортотропном материале в случае переменных параметров анизотропии и одноосного изотермического нагружения в направлении осей симметрии. Показано, что с повышением доли изотропной составляющей упрочнения мера эффекта Баушингера возрастает.*

**Ключевые слова:** эффект Баушингера, анизотропные материалы, изотропно-кинематическое упрочнение, изотермическое и неизотермическое нагружения.

В исследованиях [1–5] показано, что эффект Баушингера, обусловленный появлением в процессе пластического деформирования остаточных напряжений, оказывает существенное влияние на такие параметры механического состояния материалов как характеристики усталостной прочности и долговечность, а также на величины коэффициентов концентрации и интенсивности напряжений, последний из которых широко используется в линейной механике разрушения. Эффект Баушингера достаточно полно изучен экспериментально на изотропных материалах в условиях одноосного нагружения и кручения при комнатной

© В. Н. Бастун, И. Ю. Подильчук, 2016

температуре [6, 7]. Теоретически он исследовался с использованием концепции поверхности нагружения, разделяющей области упругого и неупругого деформирования в пространстве тензора напряжений, на анизотропных (трансверсально-изотропных и ортотропных) материалах [8, 9]. Правомерность использования такого подхода экспериментально подтверждена применительно к углеродистым сталям ферритно-перлитного класса [2, 10].

В настоящей работе рассматривается модель эффекта Баушингера в общем случае сложного напряженного состояния в материалах с деформационной анизотропией, упрочнение которых описывается гипотезой изотропно-кинематического типа, в условиях изотермического и неизотермического нагружения. При этом используется концепция поверхности нагружения совместно с графо-аналитическим методом [11], с помощью которого устанавливается связь между напряжениями и деформациями при сложном нагружении. Указанная гипотеза получила экспериментальное обоснование на широком круге металлических материалов (стали ферритно-перлитного, аустенитного и мартенситного классов, титановые и алюминиевые сплавы) [12].

**Основные положения.** В соответствии с гипотезой упрочнения изотропно-кинематического типа, поверхность нагружения материала, подвергнутого пластическому деформированию, в пространстве тензора напряжений  $\{\sigma_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), представленная в ортогональной системе координат 1, 2, 3, описывается уравнением [12]

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) - \\ & - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a_1\sigma_{11} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2\right)\sigma_{22} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2\right)\sigma_{33} - \\ & - 2\sqrt{2}(a_3\sigma_{12} + a_4\sigma_{23} + a_5\sigma_{31}) + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - R^2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, R$  — параметры, характеризующие анизотропию, обусловленную упрочнением материала. Для удобства анализа процессы нагружения, происходящие в пространстве  $\{\sigma_{ij}\}$ , рассматриваются в пятимерном девиаторном пространстве  $\{S_m\}$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ) [13], компоненты которого связаны с компонентами девиатора напряжений  $\{S_{ij}\}$  соотношениями

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}; \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_{22} - S_{33}); \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}; \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}; \quad S_5 = \sqrt{2}S_{31}. \quad (2)$$

В этом случае поверхность нагружения изобразится сферой

$$(S_i - a_i)(S_i - a_i) = R^2(\varepsilon_i^p) \quad (3)$$

с координатами центра  $a_i$  и радиусом  $R$ , которые являются функциями пластической деформации  $\varepsilon_{(i)}^p$  и определяются через пределы текучести материала в соответствии с методикой, приведенной в [12]. Заметим, что в случае изотропного материала (при этом  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, R = \sqrt{2/3}\sigma_T$ ) уравнение (1) представляет известное условие пластичности Генки–Мизеса.

Графо-аналитический метод [11] основан на гипотезе Циглера [14], в соответствии с которой поверхность нагружения (3) в процессе пластического деформирования смещается в направлении вектора, соединяющего ее центр с изображающей точкой на траектории нагружения.

Ниже, используя указанную выше модель, определим меру эффекта Баушингера в ортотропном упрочняющемся структурно стабильном материале при одноосном нагружении в направлении осей анизотропии 1,2,3 в условиях комнатной температуры (изотермический процесс). При этом мера эффекта Баушингера  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в направлении этих осей определяется соотношениями

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{\sigma_{1T}^{(-)}(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})}{\sigma_{1T}^{(+)}(\varepsilon_{(1)}^p)}, \quad \lambda_2^{(k)} = \frac{\sigma_{2T}^{(-)}(\varepsilon_{(2)}^{p(k)})}{\sigma_{2T}^{(+)}(\varepsilon_{(2)}^p)}, \quad \lambda_3^{(k)} = \frac{\sigma_{3T}^{(-)}(\varepsilon_{(3)}^{p(k)})}{\sigma_{3T}^{(+)}(\varepsilon_{(3)}^p)}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{1T}^{(+)}, \sigma_{2T}^{(+)}, \sigma_{3T}^{(+)}$  — пределы текучести при повторном растяжении в направлении осей 1, 2, 3 соответственно;  $\sigma_{1T}^{(-)}, \sigma_{2T}^{(-)}, \sigma_{3T}^{(-)}$  — пределы текучести при сжатии (после первичного растяжения) в направлении осей 1, 2, 3 соответственно, являющиеся функциями величины пластической деформации  $\varepsilon_{(i)}^p$ , накопленной при первичном растяжении;  $\varepsilon_{(1)}^p, \varepsilon_{(2)}^p, \varepsilon_{(3)}^p$  — пластические деформации при первичном растяжении в направлении осей 1, 2, 3 соответственно. Полагаем, что диаграммы деформирования, а, следовательно, и пределы текучести в направлении осей анизотропии в исходном состоянии материала  $\sigma_{1T}^{(0)}, \sigma_{2T}^{(0)}, \sigma_{3T}^{(0)}$ , а также вид функции  $R(\varepsilon_{(i)}^p)$  известны.

**Мера эффекта Баушингера в направлении осей симметрии.** В случае симметрии оси 1 имеем  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$  и  $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ . Тогда, согласно (2), траектория первичного растяжения изобразится в плоскости  $S_1 - S_2$  прямой

$$S_2 = 0, \quad (5)$$

а выражение (1) примет вид

$$\frac{2}{3}\sigma_{1T}^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a_1\sigma_{1T} + a_1^2 + a_2^2 - R^2 = 0, \quad (6)$$

где  $\sigma_{1T}$  — предел текучести в направлении оси 1, а  $R$  является функцией пластической деформации  $\varepsilon_{(1)}^p$ . При этом сфера (3) перейдет в окружность

$$(S_1 - a_1)^2 + (S_2 - a_2)^2 = R^2. \quad (7)$$

Полагая  $\sigma_{11} = \sigma_{1T}$ , из решения уравнения (6) находим

$$\sigma_{1T}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{3}{2}}[a_1 \pm (R^2 - a_2^2)^{1/2}], \quad (8)$$

где знак “+” соответствует повторному растяжению, а знак “-” — сжатию (после первичного растяжения).

Для определения входящих в (8) значений  $a_1(\varepsilon_{11}^{p(k)})$  и  $a_2(\varepsilon_{11}^{p(k)})$ , которые определяют положение центра окружности (7), воспользуемся графо-аналитическим методом [11]. Зададимся на прямой (5) рядом точек  $N_1^{(k)}(S_{1(1)}^k, S_{2(1)}^k)$ , которым соответствуют пластические деформации  $\varepsilon_{(i)}^{p(k)}$ . При этом в соответствии с гипотезой Циглера центр окружности (7) на каждом из этапов нагружения будет смещаться в направлении вектора, соединяющего ее

центр с изображающей точкой на прямой (5). На первом этапе при растяжении до точки  $N_1^{(1)}$  с координатами  $S_{1(1)}^{(1)}, S_{2(1)}^{(1)}$  (в данном случае  $S_{2(1)}^{(1)} = 0$ ) этот вектор ориентирован в направлении прямой

$$\frac{S_1 - a_1^{(0)}}{S_{1(1)}^{(1)} - a_1^{(0)}} = \frac{S_2 - a_2^{(0)}}{S_{2(1)}^{(1)} - a_2^{(0)}}, \quad (9)$$

которая проходит через точки с координатами  $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$  и  $(S_{1(1)}^{(1)}, S_{2(1)}^{(1)})$ . Здесь и далее величины, отмеченные индексом "0", относятся к исходному (недеформированному) состоянию материала и определяются по следующим формулам [9]:

$$\begin{aligned} a_1^{(0)} &= \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sigma_{2T}^{(0)}[(\sigma_{1T}^{(0)})^2 - (\sigma_{3T}^{(0)})^2] + \sqrt{2}\sigma_{3T}^{(0)}[(\sigma_{1T}^{(0)})^2 - (\sigma_{2T}^{(0)})^2]}{\sigma_{2T}^{(0)}(2\sigma_{1T}^{(0)} + \sigma_{3T}^{(0)}) + \sigma_{3T}^{(0)}(2\sigma_{1T}^{(0)} + \sigma_{2T}^{(0)})}}, \\ a_2^{(0)} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}[(\sigma_{1T}^{(0)})^2 - (\sigma_{3T}^{(0)})^2]} - (2\sigma_{1T}^{(0)} + \sigma_{3T}^{(0)})a_1^{(0)}}{\sqrt{3}\sigma_{3T}^{(0)}}, \\ R^{(0)} &= \left( \left( \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{1T}^{(0)} - a_1^{(0)} \right)^2 - (a_2^{(0)})^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решая совместно уравнения прямой (9) и окружности

$$(S_1 - S_{1(1)}^{(1)})^2 + (S_2 - S_{2(1)}^{(1)})^2 = [R(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})]^2 \quad (11)$$

с центром в точке  $(S_{1(1)}^{(1)}, S_{2(1)}^{(1)})$ , определим координаты  $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$  нового центра окружности (7), соответствующие нагружению до точки  $N^{(1)}$ .

Далее, проводя через точки  $a(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$  и  $N^{(2)}(S_{1(1)}^{(2)}, S_{2(1)}^{(2)})$  прямую

$$\frac{S_1 - a_1^{(1)}}{S_{1(1)}^{(1)} - a_1^{(1)}} = \frac{S_2 - a_2^{(1)}}{S_{2(1)}^{(1)} - a_2^{(1)}} \quad (12)$$

и решая это уравнение совместно с уравнением окружности

$$(S_1 - a_1^{(1)})^2 + (S_2 - a_2^{(1)})^2 = R^2, \quad (13)$$

находим новое положение центра окружности (7) с координатами центра  $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$ , соответствующее нагружению до точки  $N^{(2)}$ . Входящая в уравнение (13) величина  $R$  определяется из известной функции  $R(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})$  по величине деформации  $\varepsilon_{(1)}^{p(k)}$ . Поступая и далее аналогичным образом, получаем ряд точек, лежащих на траектории центра поверхности нагружения. Величины пластической деформации  $\varepsilon_{(1)}^{p(k)}$ , соответствующие точкам  $k$ , находят по известной диаграмме деформирования  $\sigma_1(\varepsilon_1)$ . Подставляя найденные значения  $a_1^{(k)}$  и  $a_2^{(k)}$ , а также значения  $R(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})$ , в (8) определяем величины пределов текучести  $\sigma_{1T}^{(\pm)}(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})$  и по первой из формул (4) находим меру эффекта Баушингера как функцию пластической

деформации  $\varepsilon_{(1)}^p$  при растяжении в направлении оси 1. При этом индекс “0” в уравнениях (10) опускается.

В случае растяжения в направлении оси 2  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$ . Тогда, согласно (2), имеем:  $S_1 = -\sigma_{22}/\sqrt{6}$ ,  $S_2 = \sigma_{22}/\sqrt{2}$ , а траектория нагружения в плоскости  $S_1 - S_2$  изобразится прямой

$$S_1 = -\frac{S_2}{\sqrt{3}}. \quad (14)$$

При растяжении в направлении оси 3  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$  и, согласно (2),  $S_1 = -\sigma_{33}/\sqrt{6}$  и  $S_2 = -\sigma_{33}/\sqrt{3}$ . В этом случае траектория нагружения изобразится прямой

$$S_1 = \frac{S_2}{\sqrt{3}}. \quad (15)$$

Далее при определении значений  $a_1^{(k)}$ ,  $a_2^{(k)}$  и  $R$  поступаем аналогично тому как это имело место в случае растяжения в направлении оси 1.

**Структурно нестабильный материал. Изотермический и неизотермический процессы.** Особенностью структурно нестабильных материалов является изменение в результате термомеханических воздействий фазового состава, а следовательно, и механических свойств. В связи с этим радиус поверхности нагружения в материале с изотропно-кинематическим упрочнением будет описываться в общем случае изотермического нагружения функционалом интенсивности накопленной пластической деформации  $\varepsilon_i^p$ , температуры  $T$  и времени ее действия  $t$ . С учетом этого выражение (3) запишется в виде

$$(S_i - a_i)(S_i - a_i) = R^2(\varepsilon_i^p, T, t), \quad (16)$$

где  $\varepsilon_i^p$  — величина, пропорциональная второму инварианту девиатора пластических деформаций. При этом предполагается, что нагрев не вызывает дополнительной анизотропии, а приводит лишь к изотропному расширению поверхности нагружения.

Функционал  $R(\varepsilon_i^p, T, t)$  конкретизируется следующим образом:

$$R(\varepsilon_i^p, T, t) = R_0(\varepsilon_i^p, T, t) + \Delta R'(\varepsilon_i^p) + \Delta R''(\varepsilon_i^p, T, t), \quad (17)$$

где слагаемые характеризуют:  $R_0(\varepsilon_i^p, T, t)$  — упрочнение материала в результате выделения из матрицы второй фазы при нагреве;  $\Delta R'$  — изотропную составляющую упрочнения;  $\Delta R''$  — интенсификацию процесса упрочнения в случае, когда нагреву предшествует пластическое деформирование, определяемое величиной интенсивности пластических деформаций  $\varepsilon_i^p$ . Заметим, что в частном случае одноосного растяжения, когда  $\varepsilon_i^p = 0$  и  $\sigma_{11} = \sigma_{1T}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , имеем

$$R_0(T, t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T(T, t) \Big|_{\varepsilon_i^p=0}. \quad (18)$$

Здесь  $\sigma_T$  — предел текучести при одноосном растяжении, связанный с количеством выделившейся фазы  $f$  соотношением [15]

$$\sigma_T = \sigma_{T(0)} + \frac{G_\Phi f^{1/2}}{4C(0,82 - f^{1/3})}, \quad (19)$$

где  $\sigma_{T(0)} = \sigma_T|_{f=0}$ ;  $G_\Phi$  — модуль сдвига выделившейся фазы;  $C = 30$  — константа.

В случае изотермического нагружения величина  $f$  является функцией температуры  $T$  и времени  $t$ :

$$f = f_{\text{пр}} \left[ 1 - \exp \left( A e^{-\frac{Q}{R^* T} t} \right) \right]. \quad (20)$$

Здесь  $f_{\text{пр}} = \text{const}$  предельное для каждого конкретного материала содержание выделившейся фазы;  $R^* = 8,314$  Дж/Моль — газовая постоянная;  $A$  и  $Q$  — соответственно диффузионная постоянная и энергия активации распада твердого раствора, которая определяется на основании термокинетической зависимости твердости. В случае неизотермического нагружения, когда  $T = T(\tau)$ , функциональная зависимость  $f(T, \tau)$  описывается выражением

$$f = \frac{f_{\text{пр}}}{t_{\text{экв}}} \int_0^t A \exp \left\{ - \left[ \frac{Q}{R^* T(\tau)} + A e^{-\frac{Q}{R^* T(\tau)} (t - \tau)} \right] \right\} T(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $T_{\text{экв}} = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau) d\tau$ . Функционал  $f(T, t)$  выбран так, что при  $T = \text{const}$  выражение (21)

принимает вид (20).

Входящая в (17) величина  $\Delta R'$  является инвариантной к виду напряженного состояния функцией интенсивности пластических деформаций и определяется из опытов на одноосное растяжение. Величина  $\Delta R''$  находится по формуле

$$\Delta R'' = k f (f_{\text{пр}} - f) \varepsilon_i^p, \quad (22)$$

которая получена из условия  $\Delta R'' = 0$  при  $f = 0$  и  $f = f_{\text{пр}}$ . Здесь  $k$  — константа, определяемая из опытов по ортогональному нагружению при некотором фиксированном значении  $f = f^* (f_{\text{пр}} > f^* > 0)$ , причем величина  $f_{\text{пр}}$  находится из графиков зависимости твердости материала от температуры  $T$  при фиксированной длительности времени нагрева  $t$ .

**Числовой пример.** В качестве примера определим меру эффекта Баушингера в ортотропном материале (сталь мартенситного класса) при знакопеременном одноосном нагружении и комнатной температуре в трех ортогональных направлениях, совпадающих с осями симметрии. Диаграммы одноосного растяжения материала в состоянии поставки приведены в работе [9]. Соответствующие значения пределов текучести  $\sigma_{1T}^0$ ,  $\sigma_{2T}^0$ ,  $\sigma_{3T}^0$  равны 1350, 1710 и 1510 МПа. Указанным значениям пределов текучести, согласно формулам [9], соответствует окружность (7) с координатами центра  $a_1^{(0)} = -161$ ,  $a_2^{(0)} = 69$  МПа и радиусом  $R^{(0)} = 1273$  МПа.

Рассмотрим следующие случаи деформационного упрочнения материала при растяжении в направлении осей 1, 2, 3, характеризующиеся долей изотропной составляющей: 1 —  $R = R^{(0)} = \text{const}$ ; 2 —  $R = R^{(0)} + 100\varepsilon_i^p$ . Вычисленные по изложенной выше методике значения характеристик материала приведены в табл. 1–3, а траектории центра окружности (7) для направлений осей 1, 2, 3 показаны на рис. 1: при постоянном значении радиуса  $R$  (обозначены 1', 2', 3' соответственно) и при переменном значении радиуса  $R$  (обозначены 1'', 2'', 3'' соответственно). Здесь точка 0' обозначает исходное положение центра окружности (7), а цифрами I, II, III обозначены прямые (5), (14), (15) соответственно.

Графики зависимости меры эффекта Баушингера от величины пластической деформации  $\varepsilon_i^p$  при растяжении в направлении осей 1, 2, 3 для указанных законов упрочнения приведены на рис. 2, где сплошные линии соответствуют случаю 1, штриховые — случаю 2. Как

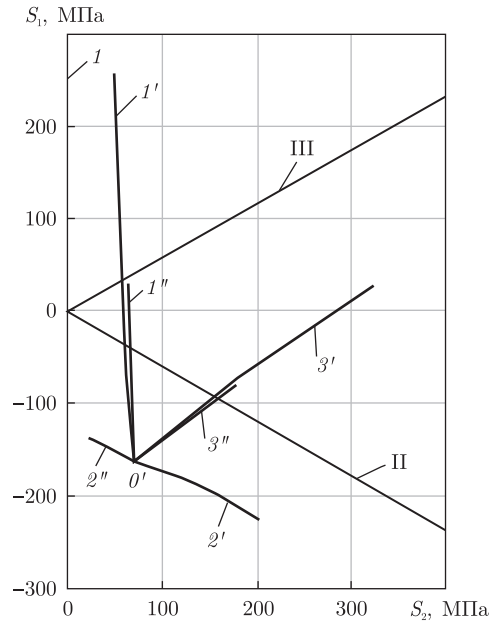


Рис. 1. Траектории центра поверхности нагружения при растяжении в направлении осей 1, 2, 3

Таблица 1. Характеристики материала при растяжении в направлении оси 1

$\varepsilon_{(1)}^p, \%$	При постоянном значении $R$				При переменном значении $R$			
	$a_{1(1)},$ МПа	$a_{2(1)},$ МПа	$\sigma_{1T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{1T}^{(-)},$ МПа	$a_{1(1)},$ МПа	$a_{2(1)},$ МПа	$\sigma_{1T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{1T}^{(-)},$ МПа
0	-161	69	1350	1750	-161	69	1350	1750
0,5	-120	67	1400	1703	-120	67	1461	1764
1	113	57	1686	1417	13	61	1686	1662
1,5	205	53	1800	1303	56	60	1800	1670

Таблица 2. Характеристики материала при растяжении в направлении оси 2

$\varepsilon_{(2)}^p, \%$	При постоянном значении $R$				При переменном значении $R$			
	$a_{1(2)},$ МПа	$a_{2(2)},$ МПа	$\sigma_{2T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{2T}^{(-)},$ МПа	$a_{1(2)},$ МПа	$a_{2(2)},$ МПа	$\sigma_{2T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{2T}^{(-)},$ МПа
0	-161	69	1710	1390	-161	69	1710	1390
0,5	-178	106	1766	1346	-178	106	1828	1407
1	-190	130	1800	1312	-147	40	1800	1557
1,5	-208	167	1850	1263	-143	31	1850	1628

Таблица 3. Характеристики материала при растяжении в направлении оси 3

$\varepsilon_{(3)}^p, \%$	При постоянном значении $R$				При переменном значении $R$			
	$a_{1(3)},$ МПа	$a_{2(3)},$ МПа	$\sigma_{3T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{3T}^{(-)},$ МПа	$a_{1(3)},$ МПа	$a_{2(3)},$ МПа	$\sigma_{3T}^{(+)},$ МПа	$\sigma_{3T}^{(-)},$ МПа
0	-161	69	1510	1610	-161	69	1510	1610
0,5	-69	192	1700	1428	-69	192	1761	1488
1	-20	257	1810	1338	-79	177	1800	1570
1,5	4	290	1850	1278	-85	169	1850	1642

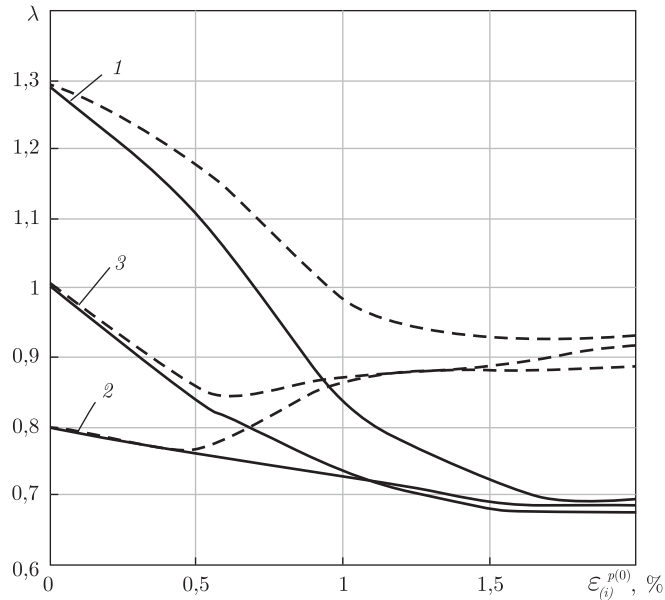


Рис. 2. Зависимости меры эффекта Баушингера  $\lambda(\varepsilon_i^p)$  при растяжении в направлении осей 1, 2, 3

видно, закон упрочнения материала оказывает заметное влияние на вид зависимости  $\lambda(\varepsilon_i^p)$ : повышение доли изотропной составляющей (случай 2) приводит к увеличению меры эффекта Баушингера. При этом характер зависимостей  $\lambda(\varepsilon_i^p)$  в случае  $R = \text{const}$  для всех трех осей симметрии качественно одинаков. В случае  $R \neq \text{const}$  ( $\Delta R > 0$ ) характер этих зависимостей определяется исходным положением центра окружности (7), т. е. видом анизотропии.

## Цитированная литература

1. Gibson M. C., Hameed A., Parker A. P., Hetherington J. G. A comparison of methods for predicting residual stresses in strain-hardening autofrettaged thick cylinders, including the Bauschinger effect // J. Pressure Vessel Technol. – 2006. – **128**, No 3. – P. 217–222.
2. Bate P. S., Wilson D. V. Analysis of the Bauschinger effect // Acta Metallurgica. – 1986. – **34**, No 6. – P. 1097–1105.
3. Silva F. S. Fatigue crack propagation after overloading and underloading at negative stress ratios // Int. J. of Fatigue. – 2007. – **29**. – P. 1757–1771.
4. Buciumeanu M., Palaghian L. Miranda A. A., Silva F. S. Fatigue life predictions including the Bauschinger effect // Int. J. of Fatigue. – 2011. – **33**, No 2. – P. 145–152.
5. Ma Q., Levy C., Peri M. The impact of the Bauschinger effect on the stress concentrations and stress intensity factors for eroded autofrettaged thick cylindrical pressure vessels // J. Pressure Vessel Technol. – 2012. – **134**. – No 2. – P. 142–149.
6. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. – Москва: Машиностроение, 1974. – Ч. 2. – 368 с.
7. Тальтов Г. Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. – 134 с.
8. Бастун В. Н. Эффект Баушингера в трансверсально-изотропных материалах с трансляционным упрочнением // Пробл. прочности. – 2012. – № 1. – С. 5–13.
9. Бастун В. Н. Прогнозирование эффекта Баушингера в ортотропных материалах с трансляционным упрочнением при знакопеременном одноосном нагружении // Доп. НАН України. – 2013. – № 10. – С. 54–63.
10. Бастун В. Н. К оценке эффекта Баушингера в листовом материале // Завод. лаборатория. – 1976. – № 6. – С. 723–724.



11. *Бастун В. Н., Шкаранута Л. М.* К определению связей между напряжениями и деформациями на основе учета деформационного упрочнения материала // Пробл. прочности. – 1987. – № 6. – С. 49–54.
12. *Bastun V. N., Kaminsky A. A.* Applied problems in the mechanics of strain hardening of structural metallic materials // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No 10. – P. 1092–1129.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Общая математическая теория. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
14. *Ziegler H.* A modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. – 1959. – No 17. – P. 55–65.
15. *Уманский Я. С., Финкельштейн Б. Н., Блантер М. Е. и др.* Физическое металловедение. – Москва: Metallurgizdat, 1955. – 724 с.

## References

1. *Gibson M. C., Hameed A., Parker A. P., Hetherington J. G. J.* Pressure Vessel Technol., 2006, **128** No 3: 217–222.
2. *Bate P. S., Wilson D. V.* Acta Metallurgica, 1986, **34**, No 6: 1097–1105.
3. *Silva F. S.* Int. J. of Fatigue, 2007, **29**: 1757–1771.
4. *Buciumeanu M., Palaghian L., Miranda A. A., Silva F. S.* Int. J. of Fatigue, 2011, **33**, No 2: 145–152.
5. *Ma Q., Levy C., Peri M. J.* Pressure Vessel Technol., 2012, **134**, No 2: 142–149.
6. *Fridman Ya. B.* Mechanical properties of metals, Moscow: Mashinostroenie, 1974, Part 2 (in Russian).
7. *Talypov G. B.* Plasticity and strength of steel under combined loading, Leningrad: Izd. Leningr. univ., 1968 (in Russian).
8. *Bastun V. N.* Strength of materials, 2012, **44**, No 1: 1–7 (in Russian).
9. *Bastun V. N.* Dopov. NAN of Ukraine, 2013, No 10: 54–63 (in Russian).
10. *Bastun V. N.* Zavod. laboratoriya, 1976, No 6: 723–724 (in Russian).
11. *Bastun V. N., Shkaraputa L. M.* Strength of materials, 1987, **19** No 6: 785–790 (in Russian).
12. *Bastun V. N., Kaminsky A. A.* Int. Appl. Mech., 2005, **41**, No 10: 1092–1129.
13. *Ильюшин А. А.* Plasticity. General mathematic theory, Moscow: Izd. AN SSSR, 1963 (in Russian).
14. *Ziegler H. A.* Quart. Appl. Math., 1959, No 17: 55–65.
15. *Уманский Я. С., Финкельштейн Б. Н., Блантер М. Е. а. о.* Physical material science, Moscow: Metallurgizdat, 1955 (in Russian).

*Поступило в редакцию 27.12.2015*

**В. М. Бастун, І. Ю. Подільчук**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*E-mail:* ipodil@voliacable.com

### **Моделювання ефекту Баушингера в ортотропних матеріалах з ізотропно-кінематичним зміцненням в умовах ізотермічного та неізотермічного навантажень**

*Розглядається модель ефекту Баушингера у загальному випадку складного напруженого стану в матеріалах з деформаційною анізотропією, зміцнення яких описується гіпотезою ізотропно-кінематичного типу, в умовах ізотермічного та неізотермічного навантажень. Модель побудована на застосуванні концепції поверхні навантаження та графо-аналітичного методу, що встановлює зв'язок між напруженнями та деформаціями у випадку складного навантаження. У якості прикладу чисельно визначена міра ефекту Баушингера в ортотропному матеріалі у випадку змінних параметрів анізотропії та одновісного ізотермічного навантаження у напрямку осей анізотропії. Показано, що з підвищенням частки ізотропної складової зміцнення міра ефекту Баушингера збільшується.*

**Ключові слова:** ефект Баушингера, анізотропні матеріали, ізотропно-кінематичне зміцнення, ізотермічне та неізотермічне навантаження.

V. N. Bastun, I. Yu. Podil'chuk

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* ipodil@voliacable.com

## **Modeling the Bauschinger effect in orthotropic materials with isotropic-kinematic hardening under isothermal and nonisothermal loadings**

*The model of the Bauschinger effect in the general case of a combined stress state in materials with strain anisotropy, whose hardening is described by the isotropic-kinematic hypothesis, is considered. The model uses the loading surface concept and a graphical-analytical method, which establishes the stress-strain relations under combined loading. As an example, the Bauschinger effect measure is determined numerically in an orthotropic material with variable anisotropy parameters under uniaxial isothermal loading along the anisotropy axes. It is shown that this measure increases with the isotropic hardening fraction.*

**Keywords:** Bauschinger effect, anisotropic materials, isotropic-kinematic hardening, isothermal and nonisothermal loadings.