http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.033
УДК 517.977.55

М. М. Копець

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
E-mail: optimal201214@yandex.ua

Оптимізація процесу осесиметричних коливань кругового кільця

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглянуто задачу оптимізації процесу осесиметричних коливань кругового кільця. Отримано необхідні умови оптимальності, які представлені у вигляді двоточкової крайової задачі. Для її дослідження виведена система інтегро-диференціаьних рівнянь Ріккаті з частинними похідними. Розв'язок цієї системи поданий в аналітичній формі. Також представлено розширену таблицю коренів трансцендентного рівняння, в якому пов'язані функції Бесселя нульового порядку першого та другого роду. Таке рівняння виникає при дослідженні процесів теплопровідності та коливних процесів в тілах циліндричної форми.

Ключові слова: задача оптимального керування, квадратичний функціонал, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності, осесиметричні коливання кругового кільця, система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті.

Коливанням вважається рух, що повторюється частково або повністю з плином часу. Коливання є найбільш поширеним рухом серед усіх рухів, які існують в природі. Зокрема, механічні коливання є основними видами рухів серед усіх механічних рухів. Добре відомо, що механічні коливання можуть бути як корисними, так і шкідливими. Наявність небажаних коливань обумовлює значні зміни у функціонуванні механічної системи і в кінцевому рахунку може спричинити її руйування. Для їх нейтралізації можна застосувати методи теорії оптимального керування, зокрема демпфірування коливань та стабілізація руху. В теорії оптимального керування важливе місце належить лінійно-квадратичній задачі, оскільки вона служить фундаментом для дослідження багатьох інших задач оптимізації. Стаття містить дослідження лінійно-квадратичної задачі оптимального керування процесом осесиметричних коливань кругового кільця. Вперше така задача вивчається в полярній системі координат. Автором отримані необхідні умови оптимальності, виведена система інтегро-диференціаьних рівнянь Ріккаті з частинними похідними, розв'язок якої представлений в замкненій формі.

Постановка задачі. Процес вимушених осесиметричних коливань кругового кільця описується наступним диференціаьним рівнянням з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right) + u(t,r), \tag{1}$$

де t означає часову змінну, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, r є просторовою змінною, $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Дійсні числа $a > 0$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, $t_0 \geqslant 0$ та $t_1 > 0$ вважаються відомими.

Означення 1. Функція $u(t, r) \in L_2(\Omega)$ називається допустимим керуванням, де множина Ω має вигляд $\Omega = \{(t, r)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1, R_1 \leqslant r \leqslant R_2\}$.

Початкові умови для рівняння (1) мають вигляд

$$z(t_0, r) = f(r), \qquad \frac{\partial z(t_0, r)}{\partial t} = g(r), \tag{2}$$

де функції $f(r) \in W_2^{1,0}(R_1, R_2)$, $g(r) \in L_2(R_1, R_2)$ відомі. Граничні умови для рівняння((1) є однорідними

$$z(t, R_1) = 0, \qquad z(t, R_2) = 0. \tag{3}$$

Якість процесу керування оцінюється за допомогою функціонала

$$I(u, z) = \frac{1}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} z^2(t_1, r) r dr + \frac{1}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\left[\frac{\partial z(t_1, r)}{\partial t}\right]^2 r dr + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R_1}^{R_2}[z^2(t, r) + u^2(t, r)] r dr dt. \tag{4}$$

Означення 2. Допустиме керування $u(t, r)$, на якому реалізуться мінімальне значення функціонала (4), називається оптимальним керуванням.

Задача оптимального керування (1)–(4) полягає у знаходженні оптимального керування $u(t, r)$.

Необхідні умови оптимальності. Використовуючи метод, запропонований в [1], отримаємо наступне твердження

Теорема 1. *Єдине оптимальне керування $u(t, r)$ можна знайти із наступної системи співвідношень*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(t, r)}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 z(t, r)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z(t, r)}{\partial r}\right) + u(t, r), \\ z(t_0, r) = f(r), \qquad \dfrac{\partial z(t_0, r)}{\partial t} = g(r), \qquad u(t, r) = -p(t, r), \\ \dfrac{\partial^2 p(t, r)}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 p(t, r)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p(t, r)}{\partial r}\right) + z(t, r), \\ z(t_1, r) + \dfrac{\partial p(t_1, r)}{\partial t} = 0, \qquad \dfrac{\partial z(t_1, r)}{\partial t} - p(t_1, r) = 0, \\ z(t, R_1) = z(t, R_2) = 0, \qquad p(t, R_1) = p(t, R_2) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. В подальшому всі рівності, пов'язані з дельта-функцією Дірака, слід розуміти як рівності в сенсі теорії узагальнених функцій. Оскільки система співвідношень (5) лінійна відносно функцій $z(t, r)$ та $p(t, r)$, то є підстави вважати, що мають місце наступні залежності

$$\frac{\partial p(t, r)}{\partial t} = -\int\limits_{R_1}^{R_2}\left[P_{11}(t, r, \rho) z(t, \rho) + P_{12}(t, r, \rho)\frac{\partial z(t, \rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho, \tag{6}$$

$$p(t, r) = \int\limits_{R_1}^{R_2}\left[P_{21}(t, r, \rho) z(t, \rho) + P_{22}(t, r, \rho)\frac{\partial z(t, \rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho. \tag{7}$$

де функції $P_{ij}(t,r,\rho)$, $(i=1,2;\ j=1,2)$ потрібно знайти. Для цього маємо таку систему співвідношень

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{11}(t,r,\rho)}{\partial t}+a^2\left(\dfrac{\partial^2 P_{12}(t,r,\rho)}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_{12}(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right)+a^2\left(\dfrac{\partial^2 P_{21}(t,r,\rho)}{\partial r^2}+\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P_{21}(t,r,\rho)}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\rho}\delta(r-\rho)-\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2} P_{12}(t,r,\lambda)P_{21}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda=0, \\ \dfrac{\partial P_{12}(t,r,\rho)}{\partial t}+a^2\left(\dfrac{\partial^2 P_{22}(t,r,\rho)}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial r}\right)+P_{11}(t,r,\rho)- \\ \qquad -\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2} P_{12}(t,r,\lambda)P_{22}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda=0, \\ \dfrac{\partial P_{21}(t,r,\rho)}{\partial t}+a^2\left(\dfrac{\partial^2 P_{22}(t,r,\rho)}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right)+P_{11}(t,r,\rho)- \\ \qquad -\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2} P_{22}(t,r,\lambda)P_{21}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda=0, \\ \dfrac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial t}+P_{12}(t,r,\rho)+P_{21}(t,r,\rho)-\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2} P_{22}(t,r,\lambda)P_{22}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda=0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\delta(r)$ — дельта-функція Дірака. Граничні умови для системи рівнянь (8) задані наступним чином

$$\begin{cases} P_{12}(t,R_1,\rho)=P_{12}(t,r,R_1)=0, \qquad P_{12}(t,R_2,\rho)=P_{12}(t,r,R_2)=0, \\ P_{22}(t,R_1,\rho)=P_{22}(t,r,R_1)=0, \qquad P_{22}(t,R_2,\rho)=P_{22}(t,r,R_2)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Рівності (6) та (7) обумовлюють такі умови трансверсальності:

$$P_{11}(t_1,r,\rho)=P_{22}(t_1,r,\rho)=\frac{1}{\rho}\delta(r-\rho), \qquad P_{12}(t_1,r,\rho)=P_{21}(t_1,r,\rho)=0. \tag{10}$$

Тепер можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Функції $P_{ij}(t,r,\rho)$, $(i,j=1,2)$ є розв'язком системи рівнянь* (8), *задовольняють умовам* (9) *та* (10).

Основний результат. Функції $P_{ij}(t,r,\rho)$ шукаємо в такому вигляді

$$P_{ij}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{nij}(t)}{\chi_n^2}\Phi_0(\lambda_n r)\Phi_0(\lambda_n\rho), \tag{11}$$

де використані наступні позначення

$$\Phi_0(\lambda r)=J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R_2)-J_0(\lambda R_2)Y_0(\lambda r), \qquad \chi_n^2=\frac{2}{\pi^2}\frac{J_0^2(\lambda_n R_1)-J_0^2(\lambda_n R_2)}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n R_1)},$$

$J_0(r)$, $Y_0(r)$ — функції Бесселя нульового порядку першого та другого роду відповідно; $p_{ij}(t)$, $(i=1,2;\ j=1,2)$ — невідомі функції; λ_n — додатні корені рівняння $J_0(\lambda R_1)Y_0(\lambda R_2)-$ $-J_0(\lambda R_2)Y_0(\lambda R_1)=0$, наближені значення яких подано в табл. 1.

Таблиця 1. Значення перших шести коренів рівняння $J_0(x)Y_0(hx) - J_0(hx)Y_0(x) = 0$

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1,1	31,41230	62,83000	94,24660	125,6630	157,0790	188,4950
1,2	15,70140	31,41260	47,12170	62,83020	78,53850	94,24670
1,5	6,270240	12,55980	18,84510	25,12940	31,41330	37,69690
2,0	3,123030	6,273440	9,418210	12,56140	15,70400	18,84620
2,5	2,073230	4,177300	6,275370	8,371670	10,46720	12,56240
3,0	1,548460	3,129080	4,703800	6,276660	7,848730	9,420390
3,5	1,233870	2,500170	3,760820	5,019610	6,277590	8,792430
4,0	1,024420	2,080940	3,132170	4,181570	5,230150	6,278290
4,5	0,875040	1,781570	2,683150	3,582970	4,481970	5,380530
5,0	0,763191	1,557110	2,346420	3,134030	3,920840	4,707220
5,5	0,676350	1,382590	2,084550	2,784870	3,484420	4,183530
6,0	0,607000	1,243030	1,875070	2,505560	3,135280	3,764580
7,0	0,503245	1,033820	1,560940	2,086630	2,611610	3,136180
8,0	0,429394	0,884531	1,336640	1,787440	2,237580	2,687340

Для дельта-функції Дірака $\delta(r)$ отримаємо таку формулу:

$$\delta(r-\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{\omega_n^2} \Phi_0(\lambda_n r)\Phi_0(\lambda_n \rho).$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{n11}(t)}{dt} - (a\lambda_n)^2[p_{n12}(t) + p_{n21}(t)] - p_{n12}(t)p_{n21} + 1 = 0, \\ \dfrac{dp_{n12}(t)}{dt} - (a\lambda_n)^2 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n12}(t)p_{n22}(t) = 0, \\ \dfrac{dp_{n21}(t)}{dt} - (a\lambda_n)^2 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n21}(t)p_{n22}(t) = 0, \\ \dfrac{dp_{n22}(t)}{dt} + p_{n12}(t) + p_{n21}(t) - p_{n22}^2(t) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

З умов (10) безпосередньо випливають наступні умови:

$$p_{n11}(t) = 1, \qquad p_{n12}(t) = 0, \qquad p_{n21}(t) = 0, \qquad p_{n22}(t) = 1. \tag{13}$$

Теорема 3. *Функції $p_{ij}(t)$, $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь* (12) *та задовольняють умовам* (13).

Зауваження. Враховуючи умови (13) і порівнюючи друге та третє рівняння системи (12), отримаємо рівність $p_{n12}(t) = p_{n21}(t)$. Введемо позначення

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{(a\lambda_n)^4 + 1} - (a\lambda_n)^2}{2}}, \qquad \beta_n = \sqrt{\frac{\sqrt{(a\lambda_n)^4 + 1} + (a\lambda_n)^2}{2}},$$

$$h_{n11}(t) = (\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\cos(2\beta_n t) - (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\cosh(2\alpha_n t),$$

$$h_{n12}(t) = \alpha_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\sinh(2\alpha_n t) - \beta_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\sin(2\beta_n t),$$

$$h_{n22}(t) = (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\cosh(2\alpha_n t) + (\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\cos(2\beta_n t),$$

$$g_{n11}(t) = 2\alpha_n \sin(2\beta_n t) + 2\beta_n \sinh(2\alpha_n t),$$

$$g_{n12}(t) = 2\alpha_n\beta_n[\cosh(2\alpha_n t) - \cos(2\beta_n t)],$$

$$g_{n22}(t) = 2\beta_n \sinh(2\alpha_n t) - 2\alpha_n \sin(2\beta_n t),$$

$$\sigma_{n1}(t) = 2\beta_n^2 \cosh(2\alpha_n t) + 2\alpha_n^2 \cos(2\beta_n t),$$

$$\sigma_{n2}(t) = \alpha_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1) \sin(2\beta_n t),$$

$$\sigma_{n3}(t) = \beta_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1) \sinh(2\alpha_n t).$$

Тоді для обчислення функцій $p_{ij}(t)$ $(i = 1, 2; j = 1, 2)$ справедливі формули

$$\begin{cases} p_{n11}(t) = -\dfrac{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)[h_{n11}(t_1 - t) - g_{n11}(t_1 - t)]}{\sigma_{n1}(t_1 - t) + \sigma_{n2}(t_1 - t) + \sigma_{n3}(t_1 - t)}, \\ p_{n12}(t) = \dfrac{h_{n12}(t_1 - t) + g_{n12}(t_1 - t)}{\sigma_{n1}(t_1 - t) + \sigma_{n2}(t_1 - t) + \sigma_{n3}(t_1 - t)}, \\ p_{n21}(t) = \dfrac{h_{n12}(t_1 - t) + g_{n12}(t_1 - t)}{\sigma_{n1}(t_1 - t) + \sigma_{n2}(t_1 - t) + \sigma_{n3}(t_1 - t)}, \\ p_{n22}(t) = \dfrac{h_{n22}(t_1 - t) + g_{n22}(t_1 - t)}{\sigma_{n1}(t_1 - t) + \sigma_{n2}(t_1 - t) + \sigma_{n3}(t_1 - t)}, \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином, ми розглянули задачу оптимізації процесу осесиметричних коливань кругового кільця. Методом множників Лагранжа отримали необхідні умови оптимальності. Довели єдиність оптимального керування. Вивели систему інтегро-диференціаьних рівнянь Ріккаті з частинними похідними та додаткові умови для неї. Розв'язок цієї системи дозволяє записати оптимальне керування в явній формі. Цікавими для подальших досліджень є ускладнення розглянутої задачі оптимізації в напрямках, описаних в [2–5].

Цитована література

1. *Копец М. М.* Линейно-квадратическая задача оптимального управления для гиперболической системы // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 1. – С. 40–51.
2. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D.* Game control problem for quasi-linear systems with fractional derivatives of Riemann-Liouville // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – No 6. – P. 66–99.
3. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Dynamic game approach problem for equations of fractional order // Ukr. mat. J. – 2000. – **52**, No 11. – P. 1566–1583.
4. *Chikrii A. A., Rappoport J. S., Chikrii K. A.* Multivalued mapping and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – **43**, No 5. – P. 719–730.
5. *Chikrii A. A., Dzyubenko K. J.* Bilinear Markov processes of searching for moving targets // J. Automation and Information Sciences. – 2001. – **33**, No 5. – P. 62–74.

References

1. *Kopets M. M.* Problems of control and infomatics 2015, No 1: 40–51 (in Russian).
2. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D. Cybernetics and* Systems Analysis, 2012, No 6: 66–99.
3. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Ukr. mat. J., 2000, **52**, No 11: 1566–1583.
4. *Chikrii A. A., Rappoport J. S., Chikrii K. A.* Cybernetics and Systems Analysis, 2007, **43**, No 5: 719–730.
5. *Chikrii A. A., Dzyubenko K. J.* J. Automation and Information Sciences, 2001, **33**, No 5: 62–74.

Надійшло до редакції 25.11.2015

М. М. Копец

НТУ Украины “Киевский политехнический институт”

E-mail: optimal201214@yandex.ua

Оптимизация процесса осесимметричных колебаний кругового кольца

В статье рассматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления осесимметричными колебаниями кругового кольца. Актуальность этой задачи не вызывает сомнений, поскольку в основном такие задачи исследовались в прямоугольной декартовой системе координат. Автором статьи предложена формулировка вышеупомянутой задачи в полярной системе координат. С помощью метода множителей Лагранжа получены необходимые условия оптимальности. Доказана единственность оптимального управления. Получена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати и дополнительные условия для нее. Решение этой системы дает возможность выписать формулу для вычисления оптимального управления.

Ключевые слова: задача оптимального управления, квадратичный функционал, метод множителей Лагранжа, необходимые условия оптимальности, осесимметричные колебания кругового кольца, система интегро-дифференциальных уравнений Риккати.

M. M. Kopets

NTU of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”

E-mail: optimal201214@yandex.ua

Optimization of the process of axisymmetric vibrations of a circular ring

The article discusses the linear-quadratic optimal control problem of axisymmetric vibrations of a circular ring. The urgency of this task arises no doubt, because such problems were mainly investigated in a rectangular Cartesian coordinate system. The author suggestes to use the polar coordinates. Using the method of Lagrange multipliers, the necessary optimality conditions are obtained. The uniqueness of optimal control is proved. We obtain a system of integro-differential Riccati equations and additional conditions for it. The solution of this system makes it possible to write down the formula for calculating the optimal control.

Keywords: optimal control problem, quadratic functional, method of Lagrange multipliers, necessary conditions of optimality, axisymmetric vibrations of a circular ring, system of integro-differential Riccati equations.