http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.022

УДК 512.544

М. Р. Діксон[1], **Л. А. Курдаченко**[2], **М. М. Семко**[3]

[1]Університет Алабами, Тускалуза, США
[2]Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
[3]Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

E-mail: mdixon@gp.as.ua.edu, lkurdachenko@i.ua, n_semko@mail.ru

Про будову груп, неабелеві підгрупи яких є серійними

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Отримано детальний опис локально скінченних груп, що не є локально нільпотентними, всі неабелеві підгрупи яких є серійними, зростаючими або переставними.

Ключові слова: локально скінченні групи, серійні підгрупи, зростаючі підгрупи, переставні підгрупи.

Вивчення будови груп, усі (власні) підгрупи яких мають деякі фіксовані властивості, є давньою класичною проблематикою теорії груп. Її початок пов'язують з роботою Р. Дедекінда [1], у якій він вивчав скінченні групи, всі підгрупи яких є нормальними. Цей напрямок виявився дуже плідним, його розвиток був продовжений багатьма відомими алгебраїстами. Зокрема, досить інтенсивно розглядалися групи, всі підгрупи яких є субнормальними. Більш детальну інформацію про ці дослідження можна знайти у книзі Дж. Леннокса, С. Стоунхевера [2] та оглядовій статті К. Касоло [3]. Інше поле досліджень розпочалося з роботи Г. Міллера, Х. Морено [4], в якій вивчалися скінченні груп, усі власні підгрупи яких є абелевими. Їх результати були узагальнені О. Ю. Шмідтом [5], який вивчав будову скінченних груп, усі власні підгрупи яких є нільпотентними. Виявилося, що отримані результати повною мірою не можуть бути розширені на нескінченні групи, оскільки існують нескінченні прості групи, всі власні підгрупи яких абелеві (навіть циклічні) (див., наприклад, книгу О. Ю. Ольшанського [6]). З іншого боку, з результатів статті [7] випливає, що нескінченна локально ступінчаста група, всі власні підгрупи яких є розширенням черніковських груп за допомогою нільпотентних, обов'язково буде розв'язною. Інтерес до груп, у яких деякі природні системи підгруп мають задані властивості, залишається постійним. Однією з таких природних систем є система всіх неабелевих підгруп. У роботі Г. М. Ромаліса, М. Ф. Сесекіна [8] було розпочато вивчення груп, усі неабелеві підгрупи яких є нормальними. Такі групи були названі ними метагамільтоновими. Вивчення метагамільтонових груп було продовжено В. Т. Нагребецьким, О. О. Махньовим, С. М. Черніковим. Більш того, В. Т. Нагребецький розглядав також і скінченні групи, всі ненільпотентні підгрупи яких є нормальними. Повний опис метагамільтонових груп був отриманий М. Ф. Кузенним, М. М. Семком [9].

У роботі Р. Філліпса, Дж. Уілсона [10] були розглянуті групи, що задовольняють умову мінімальності для несерійних ненільпотентних підгруп. Ця робота містить деякі результати (теорема C(i), зокрема) відносно груп, усі підгрупи яких є серійними або абелевими. Б. Бруно та Р. Філліпс, продовжуючи цю тематику, у роботі [11] розглядали групи, всі підгрупи яких або нормальні, або локально нільпотентні. Відмітимо ще роботи X. Сміта [12, 13], у яких він вивчав групи, всі підгрупи яких або субнормальні, або нільпотентні. Також досить детально в роботі [14] вивчалася будова локально скінченних груп, усі неабелеві підгрупи яких є субнормальними. Узагальненням субнормальних підгруп будуть зростаючі та серійні підгрупи. Ці узагальнення є доволі широкими. Кожна підгрупа локально нільпотентної групи буде серійною, і якщо всі підгрупи локально скінченної групи є серійними, то така група локально нільпотентна. Ці міркування показують, що буде доцільним розглядати групи, що не є локально нільпотентними.

Як було доведено в [10], локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є серійними, або локально нільпотентна, або черніковська, або має центр скінченного індексу. Неважко упевнитись у тому, що в другому випадку кожна серійна підгрупа є зростаючою, а в третьому — субнормальною. Далі, якщо група не є локально нільпотентною, то вивчення її будови розпадається на два випадки. Перший випадок — група має неабелеву силовську p-підгрупу для деякого простого числа p. Другий випадок — силовські p-підгрупи є абелевими для кожного простого числа p. Для кожного з цих випадків отримано детальний опис, який ми зараз наведемо.

Теорема A. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є серійними. Також припустимо, що G не є локально нільпотентною та має неабелеву силовську p-підгрупу для деякого простого числа p. Тоді мають місце такі твердження:*

(i) $G = P \leftthreetimes Q$, де Q — абелева силовська p'-підгрупа G;

(ii) $C = C_P(Q)$ — така G-інваріантна абелева підгрупа P, що фактор P/C є скінченним та G-головним;

(iii) $G/C_G(P/C)$ є циклічною p'-групою;

(iv) P/C є $\langle g \rangle$-головним фактором для будь-якого елемента g, що не належить до $C_G(P/C)$;

(v) $P = CD$, де $D = [P, Q]$ — скінченна неабелева спеціальна p-підгрупа та $|D/[D, D]| \geqslant$ $\geqslant p^2$;

(vi) $C \bigcap D = [D, D] = \zeta(D) \leqslant \zeta(G)$ та P є нільпотентною підгрупою, клас нільпотентності якої дорівнює 2;

(vii) $D = [P, \langle g \rangle] = [D, \langle g \rangle]$ для кожного елемента g, що не належить до $C_G(P/C)$;

(viii) $C_G(D) = C \times C_Q(D/[D, D])$ є абелевою.

***Навпаки**, якщо група задовольняє наведені вище умови (i)–(viii), то кожна її неабелева підгрупа буде субнормальною.*

Теорема B. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є серійними. Також припустимо, що G не є локально нільпотентною, а її силовські s-підгрупи є абелевими для кожного простого числа s. Тоді мають місце такі твердження:*

(i) знайдеться таке просте число p, що G має нормальну силовську p-підгрупу P та $G = P \leftthreetimes Q$, де Q — абелева силовська p'-підгрупа G;

(ii) $[P, Q]$ — мінімальна G-інваріантна підгрупа та $P = C_P(Q) \times [P, Q]$;

(iii) $G/C_G([P,\ Q])$ є циклічною p'-групою;

(iv) $[P, Q]$ є мінімальною $\langle g \rangle$-інваріантною підгрупою P для кожного елемента g, що не належить до $C_G([P, Q])$;

***Навпаки**, якщо група задовольняє наведені вище умови (i)–(iv), то кожна її неабелева підгрупа буде нормальною.*

У роботі [15] було розпочато вивчення груп, неабелеві підгрупи яких є переставними. Нагадаємо, що підгрупа K називається *переставною* в групі G, якщо $KH = HK$ для будь-якої підгрупи H групи G. Кожна нормальна підгрупа є переставною. С. Стоунхевер у 1972 р. показав, що кожна переставна підгрупа буде зростаючою. Таким чином, можна використати теореми A і B та отримати нижчеподаний детальний опис локально скінченних груп, що не є локально нільпотентними, неабелеві підгрупи яких є переставними. Тут ми також маємо два випадки залежно від того, чи має група неабелеву силовську p-підгрупу, чи всі її силовські підгрупи є абелевими.

Теорема C. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є переставними. Також припустимо, що G не є локально нільпотентною та має неабелеву силовську p-підгрупу для деякого простого числа p. Тоді мають місце такі твердження:*

(i) $G = P \leftthreetimes Q$, де Q — абелева силовська p'-підгрупа G;

(ii) $P = [P, Q]$ є скінченною неабелевою p-підгрупою порядку p^3; більше того, або P є групою кватерніонів, або P є групою експоненти p;

(iii) $[P, P] = \zeta(P) \leqslant \zeta(G)$;

(iv) $P/[P, P]$ — G-головний фактор порядку p^2;

(v) $P/[P, P]$ є $\langle g\rangle$-головним фактором для будь-якого елемента g, що не належить до $C_G(P/[P, P])$;

(vi) $G/C_G(P/[P, P])$ є циклічною p'-групою;

(vii) $C_G(P) = [P, P] \times C_G(P/[P, P])$ є абелевою підгрупою;

(viii) $P = [P, \langle g\rangle]$ для кожного елемента g, що не належить до $C_G(P/[P, P])$.

***Навпаки**, якщо група задовольняє наведені вище умови (i)–(viii), то кожна її неабелева підгрупа буде нормальною.*

Теорема D. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є переставними. Також припустимо, що G не є локально нільпотентною, а її силовські s-підгрупи є абелевими для кожного простого числа s. Тоді мають місце такі твердження:*

(i) знайдеться таке просте число p, що G має нормальну силовську p-підгрупу P та $G = P \leftthreetimes Q$, де Q — абелева силовська p'-підгрупа G;

(ii) $[P, Q]$ — мінімальна G-інваріантна підгрупа та $P = C_P(Q) \times [P, Q]$;

(iii) $G/C_G([P, Q])$ є циклічною p'-групою;

(iv) $[P, Q]$ є мінімальною $\langle g\rangle$-інваріантною підгрупою P для кожного елемента g, що не належить до $C_G([P, Q])$.

***Навпаки**, якщо група задовольняє наведені вище умови (i)–(iv), то кожна її неабелева підгрупа буде нормальною.*

Наостанок розглянемо деякі неперіодичні групи, неабелеві підгрупи яких є переставними.

Теорема E. *Нехай G — локально ступінчаста група, всі неабелеві підгрупи якої є переставними. Також припустимо, що G не є локально нільпотентною та її 0-ранг не менше 2. Тоді G є групою одного з нижчевказаних типів.*

(I) G задовольняє такі умови:

(Ia) $[G, G]$ є скінченною мінімальною нормальною підгрупою G;

(Ib) $[G, G]$ є елементарною абелевою p-підгрупою для деякого простого числа p;

(Ic) $C_G([G, G])$ є абелевою та $G/C_G([G, G])$ є циклічною p'-групою;

(Id) $[G, G]$ є мінімальною $\langle g\rangle$-інваріантною підгрупою для кожного елемента g, що не належить до $C_G([G, G])$.

(II) G задовольняє такі умови:

(IIa) $P = [G, G]$ має порядок p^3; більше того, або P є групою кватерніонів, або P є групою експоненти p;

(IIb) $P/[P,P]$ *є* $\langle g \rangle$*-головним фактором для будь-якого елемента* g*, що не належить до* $C_G(P/[P,P])$*;*

(IIc) $[P,P] \leqslant \zeta(G)$*;*

(IId) $G = P \leftthreetimes Q$*, де* Q *— абелева підгрупа* G*;*

(IIe) $G/C_G(P/[P,P])$ *є циклічною* p'*-групою;*

(IIf) $C_G(P) = [P,P] \times C_Q(P/[P,P])$ *є абелевою.*

Навпаки*, якщо група задовольняє наведені вище умови, то кожна її неабелева підгрупа буде нормальною.*

Цитована література

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. – 1897. – **48**. – S. 548–561.
2. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1987. – 253 p.
3. *Casolo C.* Groups with all subgroups subnormal // Note Mat. – 2008. – **28**, suppl. 2. – P. 1–149.
4. *Miller G. A., Moreno H. C.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – **4**. – P. 389–404.
5. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**, № 3. – С. 366–372.
6. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – Москва: Наука, 1989. – 447 с.
7. *Asar A. O.* Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov // J. London Math. – 2000. – **61**. – P. 412–422.
8. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – **5**, № 3. – С. 45–49.
9. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
10. *Phillips R. E., Wilson J. S.* On certain minimal conditions for infinite groups // J. Algebra. – 1978. – **51**. – P. 41–68.
11. *Bruno B., Phillips R.* Groups with restricted nonnormal subgroups // Math. Z. – 1981. – **176**, No 2. – P. 199–221.
12. *Smith H.* Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Quad. Mat. – 2001. – **8**: Topics in infinite groups. – P. 309–326.
13. *Smith H.* Torsion-free groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Quad. Mat. – 2001. – **8**: Topics in infinite groups. – P. 297–308.
14. *Kurdachenko L. A., Atlihan S., Semko N. N.* On the structure of groups whose non-abelian subgroups are subnormal // Central Eur. J. Math. – 2014. – **12**, No 12. – P. 1762–1771.
15. *de Falco M., de Giovanni F., Musella C., Schmidt R.* Groups in which every non-abelian subgroup is permutable // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). – 2003. – **52**, No 1. – P. 70–76.

References

1. *Dedekind R.* Math. Ann., 1897, **48**: 548–561.
2. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups, Oxford: Clarendon Press, 1987.
3. *Casolo C.* Note Mat., 2008, **28**, suppl. 2: 1–149.
4. *Miller G. A., Moreno H. C.* Trans. Amer. Math. Soc., 1903, **4**: 389–404.
5. *Schmidt O. Yu.* Mat. Sb., 1924, **31**, No 3: 366–372 (in Russian).
6. *Ol'shanskij A. Yu.* Geometry of defining relations in groups, Moscow: Nauka, 1989 (in Russian).
7. *Asar A. O.* J. London Math., 2000, **61**: 412–422.
8. *Romalis G. M., Sesekin N. F.* Matem. Zap. Ural. Univ., 1966, **5**, No 3: 45–49 (in Russian).
9. *Kuzenny N. F., Semko N. N.* Metahamiltonian groups and their generalizations, Kiev: Math. Institute of the NAS of Ukraine, 1996 (in Ukrainian).
10. *Phillips R. E., Wilson J. S.* J. Algebra, 1978, **51**: 41–68.
11. *Bruno B., Phillips R.* Math. Z., 1981, **176**, No 2: 199–221.

12. *Smith H.* Quad. Mat., 2001, **8**: Topics in infinite groups: 309–326.
13. *Smith H.* Quad. Mat., 2001, **8**: Topics in infinite groups: 297–308.
14. *Kurdachenko L. A., Atlihan S., Semko N. N.* Central Eur. J. Math., 2014, **12**, No 12: 1762–1771.
15. *de Falco M., de Giovanni F., Musella C., Schmidt R.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 2003, **52**, No 1: 70–76.

Надійшло до редакції 11.02.2016

М. Р. Диксон[1], Л. А. Курдаченко[2], Н. Н. Семко[3]

[1]Университет Алабамы, Тускалуза, США
[2]Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
[3]Национальный университет государственной налоговой службы Украины, Ирпень

E-mail: mdixon@gp.as.ua.edu, lkurdachenko@i.ua, n_semko@mail.ru

О строении групп, неабелевы подгруппы которых являются серийными

Получено подробное описание локально конечных групп, которые не являются локально нильпотентными, все неабелевы подгруппы которых являются серийными, возрастающими или перестановочными.

Ключевые слова: локально конечные группы, серийные подгруппы, возрастающие подгруппы, перестановочные подгруппы.

M. R. Dixon[1], L. A. Kurdachenko[2], N. N. Semko[3]

[1]University of Alabama, Tuscaloosa, USA
[2]Oles Honchar Dnipropetrovs'k National University
[3]State Tax Service National University of Ukraine, Irpin

E-mail: mdixon@gp.as.ua.edu, lkurdachenko@i.ua, n_semko@mail.ru

On the structure of groups whose non-abelian subgroups are serial

We obtain a detailed description of non locally nilpotent locally finite groups, whose non-abelian subgroups are serial, ascendant, or permutable.

Keywords: local finite group, serial subgroup, ascendant subgroup, permutable subgroup.