



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.007>
УДК 517.98

Член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук¹, В. М. Горбачук²

¹Інститут математики НАН України, Київ

²НТУ України "Київський політехнічний інститут"

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v.m.horbach@gmail.com

Прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі

Розглянуто рівняння вигляду $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, де A — генератор C_0 -групи лінійних операторів у банаховому просторі. Наведено прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків цього рівняння цілими розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між порядком прямування до нуля найкращого наближення розв'язку і степенем його гладкості.

Ключові слова: банахів простір, диференціальне рівняння у банаховому просторі, слабкий розв'язок, C_0 -група лінійних операторів, ціла вектор-функція, ціла вектор-функція експоненціального типу, найкраще наближення, модуль неперервності.

1. Нехай $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — обмежена C_0 -група лінійних неперервних операторів у банаховому просторі \mathfrak{B} з нормою $\|\cdot\|$ над полем \mathbb{C} комплексних чисел, тобто (див. [1]):

- (i) $\forall t, s \in \mathbb{R}: U(t+s) = U(t)U(s)$;
- (ii) $\forall f \in \mathfrak{B}: U(t)f \rightarrow f$ при $t \rightarrow 0$;
- (iii) $\|U(t)\| \leq c$, $t \in \mathbb{R}$, $c > 0$ — стала.

Введенням нової норми в \mathfrak{B} , еквівалентної вихідній, можна добитися, щоб $\|U(t)\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, а тому надалі групу $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ вважатимемо ізометричною. Позначимо через A її генератор, а через $C_{\{1\}}(A)$ — множину його цілих векторів експоненціального типу:

$$C_{\{1\}}(A) = \left\{ f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \mid \exists c = c(f) > 0, \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}: \|A^n f\| \leq c\alpha^n \right\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора). Величину

$$\sigma(f, A) = \inf\{\alpha > 0: \|A^n f\| \leq c\alpha^n \ (n \in \mathbb{N}_0, c = c(f))\}$$

© М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук, 2016

називатимемо типом вектора $f \in C_{\{1\}}(A)$ відносно оператора A . Як показано в [2], у випадку, коли A — генератор обмеженої C_0 -групи, множина $C_{\{1\}}(A)$ є щільною в \mathfrak{B} .

Розглянемо тепер рівняння

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Під слабким розв'язком рівняння (1) розумітимемо неперервну вектор-функцію $y(t): \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ таку, що $\int_0^t y(s) ds \in \mathcal{D}(A)$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ і яка задовольняє рівняння

$$y(t) = A \int_0^t y(s) ds + y(0).$$

Множину всіх слабких розв'язків рівняння (1) позначимо через S . Відомо (див. [3]), що

$$S = \{y(t): \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B} \mid y(t) = U(t)f, f \in \mathfrak{B}\}, \quad (2)$$

тоді як множина сильних (або просто) розв'язків описується формулою (2), де f перебігає всю множину $\mathcal{D}(A)$. Неважко переконатися, що S — банахів простір відносно норми $\|y\|_S = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)f\|$.

Якщо оператор A обмежений, то будь-який слабкий розв'язок рівняння (1) допускає продовження до цілої \mathfrak{B} -значної вектор-функції експоненціального типу

$$\sigma(y) = \inf\{\alpha > 0: \|y(t)\| \leq ce^{\alpha t}\} \leq \|A\|.$$

Це не так у випадку необмеженого A . Множина S_0 усіх слабких розв'язків, що мають таку властивість, описується нижченаведеною теоремою.

Теорема 1. *Слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (1) належить до множини S_0 тоді і тільки тоді, коли його можна зобразити у вигляді*

$$y(t) = U(t)f, \quad f \in C_{\{1\}}(A).$$

Ця множина є щільною в просторі S і $\sigma(y) = \sigma(f, A)$. Більш того, для $y \in S_0$ має місце аналог нерівності Бернштейна

$$\|y^{(k)}\|_S \leq \sigma^k(y) \|y\|_S.$$

З огляду на цю теорему природно постає питання про можливість наближення довільного слабого розв'язку рівняння (1) цілими розв'язками експоненціального типу. Нижче дається відповідь на це питання, а саме, установлюються прямі й обернені теореми, в яких з'ясовується зв'язок між ступенем гладкості розв'язку і порядком прямування до нуля його найкращого наближення. Важливу роль при цьому відіграє операторний підхід до задач апроксимації, розвинутий в [4–6].

2. Для $y \in S$ покладемо

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{z \in S_0: \sigma(z) \leq r} \|y - z\|_S \quad (r > 0).$$

Отже, $\mathcal{E}_r(y)$ — найкраще наближення слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (1) цілими його розв'язками $z(t)$ експоненціального типу, тип яких не перевищує r . При фіксованому y функція $\mathcal{E}_r(y)$ не зростає і, оскільки $\overline{S_0} = S$, $\mathcal{E}_r(y) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Для довільних $t > 0$ і $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $\omega_k(t, y)$ модуль неперервності порядку k вектор-функції $y \in S$:

$$\omega_k(t, y) = \sup_{|h| < t} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh) \right\|, \quad \omega_0(t, y) = \|y(t)\|.$$

Виходячи з (2), приходимо до висновку, що

$$\forall k \in \mathbb{N}_0: \omega_k(t, y) = \sup_{|\tau| < t} \|(U(\tau) - I)^k y\|_S.$$

Нижчесформульована теорема установлює зв'язок між $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$, який по суті є аналогом нерівності Джексона при наближенні неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами.

Теорема 2. *Нехай $y \in S$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists c_k: \quad \mathcal{E}_r(y) \leq c_k \omega_k\left(\frac{1}{r}, y\right) \quad (r > 0).$$

Позначимо через $C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх m разів неперервно диференційовних \mathfrak{B} -значних вектор-функцій на \mathbb{R} . Замкненість оператора A і включення $y \in S \cap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ зумовлюють включення $y^{(k)} \in S$, $k = 1, 2, \dots, m$. Якщо $f \in \mathcal{D}(A^m)$, то

$$\forall t \in \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right): \quad \|(U(t) - I)^{m+k} f\| \leq \frac{1}{r^m} \|(U(t) - I)^k A^m f\|$$

(I — тотожний оператор). З цієї нерівності і теореми 2 випливає

Теорема 3. *Припустимо, що $y \in S \cap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді*

$$\forall m, k \in \mathbb{N}_0, \quad \forall r > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_k}{r^m} \omega_k\left(\frac{1}{r}, y^{(m)}\right)$$

(сталі c_k такі самі, як у теоремі 2).

Покладаючи в теоремі 3 $k = 0$ і враховуючи, що $\omega_0(t, y) = \|y(t)\|$, одержуємо

Наслідок 1. *Нехай $y \in S \cap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді*

$$\forall r > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_0}{r^m} \|y^{(m)}\|.$$

Значимо, що з нерівності $\mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c}{r^m}$, $r > 0$, ще не випливає, що $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Проте має місце таке твердження, обернене до теореми 3.

Теорема 4. *Нехай $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності, тобто:*

- 1) $\omega(t)$ є неспадною неперервною функцією на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;
- 2) $\omega(0) = 0$;
- 3) $\exists \gamma > 0, \forall t \in [0, 1]: \omega(2t) < \gamma \omega(t)$;

$$4) \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Якщо для $y \in S$ існують стала $c > 0$ і $m \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c}{r^m} \omega\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\forall r > 0),$$

то $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ і

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \exists c_k > 0: \quad \omega_k(t, y) \leq c_k \left(t^k \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds + \int_t^1 \frac{\omega(s)}{s^{k+1}} ds \right).$$

Наслідок 2. Нехай $y \in S$ і

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \exists c > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c}{r^{m+\varepsilon}}.$$

Тоді $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Позначимо через $C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх нескінченно диференційовних \mathfrak{B} -значних вектор-функцій на \mathbb{R} .

Наслідок 3. Має місце таке співвідношення еквівалентності:

$$y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \iff \forall k \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{E}_r(y) = o\left(\frac{1}{r^k}\right).$$

3. У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ — гільбертів простір, групу $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ можна вважати унітарною, оскільки (див. [7]) для будь-якої обмеженої групи в \mathfrak{H} можна підібрати в цьому просторі скалярний добуток, еквівалентний вихідному, так, щоб відносно нього розглядувана група була саме такою. За теоремою Стоуна її генератор має вигляд $A = iB$, де B — самоспряжений оператор. Позначимо через $E(\Delta)$ його спектральну міру. Як показано у [8],

$$C_{\{1\}}(A) = \{f \in \mathfrak{H} \mid f = E([- \alpha, \alpha])g, \forall \alpha > 0, \forall g \in \mathfrak{H}\}.$$

У цьому випадку можна явно виписати сталі c_k , що фігурують в теоремах 2 і 3, а саме: $c_k = \sqrt{k + 1/2^k}$. Більш того, сформульовані вище прямі й обернені теореми для розв'язків скінченної гладкості можна поширити на розв'язки, що належать деяким класам нескінченно диференційовних \mathfrak{H} -значних вектор-функцій. Перейдемо до результатів, отриманих у цьому напрямку.

Нехай $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — неспадна послідовність додатних чисел (не обмежуючи загальності, можна завжди припустити, що $m_0 = 1$). Покладемо

$$C_{\{m_n\}} = C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcup_{\alpha > 0} C_{m_n}^\alpha, \quad C_{(m_n)} = C_{(m_n)}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcap_{\alpha > 0} C_{m_n}^\alpha,$$

де

$$C_{m_n}^\alpha = C_{m_n}^\alpha(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) \mid \exists c = c(y), \forall k \in \mathbb{N}: \|y^{(k)}\|_S \leq c \alpha^k m_k\} —$$

банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{C_{m_n}^\alpha} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|y^{(k)}\|_S}{\alpha^k m_k}.$$

У просторі $C_{\{m_n\}}$ ($C_{(m_n)}$) вводиться топологія індуктивної (проективної) границі банахових просторів $C_{m_n}^\alpha$. Зауважимо, що простори $C_{\{n!\}}$, $C_{(n!)}$ ($m_n = n!$) та $C_{\{1\}}$ ($m_n \equiv 1$) є не що інше, як простори обмежених на \mathbb{R} аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу \mathfrak{H} -значних вектор-функцій.

Припустимо, що послідовність $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ задовольняє умову

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists c = c(\alpha) > 0: \quad m_n \geq c\alpha^n, \quad (3)$$

і розглянемо функцію

$$p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}.$$

Внаслідок (3) ця функція є цілою, $p(\lambda) \geq 1$ при $\lambda > 0$ і $p(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теорема 5. *Нехай додатково послідовність $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ має властивість*

$$\exists c > 0, \quad \exists h > 1: \quad m_{n+1} \leq ch^n m_n.$$

Тоді виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$y \in C_{\{m_n\}} \iff \exists \alpha > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) = O(p^{-1}(\alpha r));$$

$$y \in C_{(m_n)} \iff \forall \alpha > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) = O(p^{-1}(\alpha r)).$$

У випадку, коли $m_n = n^{n\beta}$, $0 < \beta < \infty$, з теореми 5 випливає

Наслідок 4. *Мають місце співвідношення*

$$y \in C_{\{n^{n\beta}\}} \iff \exists \alpha > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}});$$

та

$$y \in C_{(n^{n\beta})} \iff \forall \alpha > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}}).$$

Нагадаємо, що ціла \mathfrak{H} -значна вектор-функція $x(\lambda)$ є скінченного порядку росту, якщо

$$\exists \gamma > 0: \quad \|x(\lambda)\| \leq \exp(|\lambda|^\gamma).$$

Точна нижня межа $\rho(x)$ таких γ називається порядком $x(\lambda)$. З наслідка 4 випливає таке твердження.

Наслідок 5. *Розв'язок $y \in S$ рівняння (1) допускає продовження до цілої \mathfrak{H} -значної вектор-функції порядку ρ і скінченного типу тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists \alpha > 0: \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}}),$$

де ρ і β пов'язані між собою рівністю $\beta = (\rho - 1)/\rho < 1$.

4. Результати п. 2 можна в певному сенсі поширити на випадок, коли генератор A групи $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ є неквазіаналітичним, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{1+t^2} dt < \infty.$$

За цієї умови, як показано у [8], множина всіх цілих векторів експоненціального типу оператора A є щільною в \mathfrak{B} . Оскільки в цьому випадку група $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ може бути необмеженою, то наближення $y \in S$ розв'язками з S_0 проводиться не на \mathbb{R} , а на довільному скінченному проміжку $[-b, b]$, при цьому норма в S визначається як

$$\|y\|_{S,b} = \sup_{|t| \leq b} \|y(t)\|,$$

а в означеннях величин $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$ замість норми $\|\cdot\|_S$ фігурує $\|\cdot\|_{S,b}$. Теорема 2–4 та наслідки 1, 2 залишаються вірними, лише сталі c_k в них тепер залежать від b : $c_k = c_k(b)$.

Цитована література

1. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
2. Радыно Я. В. Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 215–229.
3. Ball J. M. Continuity properties of nonlinear semigroups // J. Funct. Anal. – 1974. – **17**, No 1. – P. 91–103.
4. Курцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 118–178.
5. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, вып. 6. – С. 90–108.
6. Горбачук М. Л., Грушка Я. И., Торба С. М. Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 633–643.
7. de Sz.-Nagy B. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space // Acta Sci. Math. (Szeged.) – 1947. – **11**, No 3. – P. 152–157.
8. Горбачук М. Л. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596–607.

References

1. Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semi-Groups, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962 (in Russian).
2. Radyno Ya. V. Dokl. AN BSSR, 1983, **27**, No 9: 215–229 (in Russian).
3. Ball J. M. J. Funct. Anal., 1974, **17**, No 1: 91–103.
4. Kurcov N. P. Uspekhi Mat. Nauk, 1968, **23**, Iss. 4: 118–178 (in Russian).
5. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Algebra and Analysis, 1997, **9**, Iss. 6: 90–108 (in Russian).
6. Gorbachuk M. L., Grushka Ya. I., Torba S. M. Ukrain. Mat. Zh., 2005, **57**, No 5: 633–643 (in Ukrainian).
7. de Sz.-Nagy B. Acta Sci. Math., 1947, **11**, No 3: 152–157.
8. Gorbachuk M. L. Ukrain. Mat. Zh., 2000, **52**, No 5: 596–607 (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 26.01.2016

Член-корреспондент НАН Украины М. Л. Горбачук¹, В. М. Горбачук²

¹Институт математики НАН Украины, Киев

²НТУ Украины “Киевский политехнический институт”

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v. m.horbach@gmail.com

Прямые и обратные теоремы теории приближений решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Рассмотрено уравнение вида $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, где A — генератор C_0 -группы линейных операторов в банаховом пространстве. Представлены прямые и обратные теоремы теории приближений слабых решений этого уравнения целыми решениями экспоненциального типа, которые устанавливают взаимно однозначное соответствие между порядком стремления к нулю наилучшего приближения решения и степенью его гладкости.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, слабое решение, C_0 -группа линейных операторов, целая вектор-функция, целая вектор-функция экспоненциального типа, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine M. L. Gorbachuk¹, V. M. Gorbachuk²

¹Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

²NTU of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v. m.horbach@gmail.com

The direct and inverse theorems of the approximation theory for solutions of differential equations in a Banach space

An equation of the form $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, where A is the generator of a C_0 -group of linear operators on a Banach space, is considered. The direct and inverse theorems of the theory of approximation of weak solutions of this equation by entire solutions of exponential type, which establish the one-to-one correspondence between the order of convergence to zero of the best approximation of a solution and its smoothness degree, are presented.

Keywords: Banach space, differential equation in a Banach space, weak solution, C_0 -group of linear operators, entire vector-valued function, entire vector-valued function of exponential type, the best approximation, continuity module.