http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.06.015

УДК 517.946

М. В. Гончаренко[1], Л. А. Хилькова[2]

[1]Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков
[2]Институт химических технологий Восточноукраинского национального университета им. Владимира Даля, Рубежное

E-mail: marusya61@yahoo.co.uk, larahil@inbox.ru

Усредненная модель диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Рассмотрена краевая задача, описывающая процесс стационарной диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе. Изучено асимптотическое поведение решения, когда масштаб микроструктуры среды $\varepsilon \to 0$. Построено усредненное уравнение, описывающее главный член асимптотики, для коэффициентов которого (эффективных характеристик среды) получены явные формулы.

Ключевые слова: усреднение, диффузия, эллиптическое уравнение, третье краевое условие, локально периодическая пористая область, функция поглощения, тензор проводимости.

Во многих отраслях естественных наук возникает потребность в исследовании стационарной диффузии в пористых средах с поглощением на границе. Такие задачи в последнее время интенсивно изучались, но в основном для областей с несвязной границей, состоящей из периодически расположенных компонент (см. [1–6]). Более произвольная пористая среда была рассмотрена в работе [7] — изучалась 3-я краевая задача для уравнения Пуассона в области, удовлетворяющей условию сильной связности, с нелинейными краевыми взаимодействиями на границе. В данной работе мы исследуем локально периодическую пористую среду, которая является частным случаем среды, изученной в работе [7], строим усредненное уравнение диффузии, для коэффициентов которого (эффективных характеристик среды) выводим явные формулы.

Рассмотрим модель пористой среды. А именно, пусть Ω — фиксированная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, а F_α^ε — подобласти в Ω (зерна) с гладкими непересекающимися границами $\partial F_\alpha^\varepsilon$. Размеры и количество зерен F_α^ε зависят от малого параметра ε так, что при $\varepsilon \to 0$ диаметры F_α^ε стремятся к нулю, а их количество $N(\varepsilon)$ — к ∞ и F_α^ε располагаются "объемно" в области Ω. Обозначим $F^\varepsilon = \bigcup\limits_\alpha F_\alpha^\varepsilon$, $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$.

Процесс стационарной диффузии с нелинейным поглощением на границе зерен в такой среде описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), & x \in \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\sigma(x, u^\varepsilon) = 0, & x \in \partial F^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, ν — единичная нормаль к границе ∂F^ε, внешняя по отношению к области Ω^ε; функция $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, функция $\sigma(x, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

a_1) $\sigma(x, u) \in C(\Omega \times R^1)$;

a_2) $\sigma(x, 0) = 0$;

a_3) $\forall u_1, u_2 \in R^1\colon (\sigma(x, u_1) - \sigma(x, u_2))(u_1 - u_2) \geqslant 0$;

a_4) $\forall u_1, u_2 \in R^1\colon |\sigma(x, u_1) - \sigma(x, u_2)| \leqslant C(1 + |u_1|^{\Theta_1 - 1} + |u_2|^{\Theta_1 - 1}) \cdot |u_1 - u_2|$, $\Theta_1 < n/(n-2)$.

При перечисленных условиях существует единственное обобщенное решение задачи (1) (см., например, [8]). Напомним, что обобщенным решением задачи (1) называется функция $u^\varepsilon(x) \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)\colon u|_{\partial\Omega} = 0\}$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} [(\nabla u^\varepsilon, \nabla\varphi^\varepsilon) - f^\varepsilon\varphi^\varepsilon]\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\varphi^\varepsilon d\Gamma = 0, \qquad \forall \varphi^\varepsilon(x) \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega). \tag{2}$$

Ввиду сильной "пористости", непосредственное применение аналитических или численных методов для решения этой задачи практически невозможно. Однако если масштаб микроструктуры пористой среды достаточно мал по сравнению с характерным масштабом процессов, протекающих в ней, то естественно перейти к усредненному описанию этих процессов. Основная цель данной работы — изучение асимптотического поведения обобщенного решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1) при $\varepsilon \to 0$.

Перед тем как сформулировать основной результат, определим локально периодическую структуру пористой среды.

Предположим, что расположение зерен F_α^ε локально близко к периодическому. Это означает, что F_α^ε находятся в периодически расположенных параллелепипедах, а диаметры, ориентации и центры зерен, находящихся в соседних параллелепипедах, отличаются на малую, по сравнению с периодом ε, величину.

Обозначим:

$$\varPi = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n\colon |\xi_i| \leqslant \frac{\theta_i}{2},\ i = \overline{1, n}\right\}, \qquad \varPi^{\pm\delta} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n\colon |\xi_i| \leqslant \frac{\theta_i}{2}(1 \pm \delta),\ i = \overline{1, n}\right\},$$

где δ — произвольное малое число ($\delta \ll 1$), $\theta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим в параллелепипеде $\varPi$ произвольную область F с гладкой границей ∂F. Обозначим F_x область, полученную из F с помощью диффеоморфизма $f_x(\xi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$F_x = f_x(F), \qquad \partial F_x = f_x(\partial F), \tag{3}$$

где $f_x(\xi)$ зависит от точки $x \in \Omega$ как от параметра так, что $f_0(\xi) = I$ (I — тождественное отображение), $\forall x \in \Omega$: $F_x \subset \Pi^{-2\delta}$ и

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_{C^1(\Omega)} \leqslant C|x_1 - x_2|. \tag{4}$$

Разрежем пространство $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды $\Pi_\alpha^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_i - x_i^\alpha| \leqslant \theta_i\varepsilon/2, i = \overline{1,n}\}$ с центрами в точках $x^\alpha = \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha e^i$, где $x_i^\alpha = m_i^\alpha \theta_i$ ($m_i^\alpha \in Z$), и ребрами, ориентированными по координатным осям. Центры кубов x^α образуют периодическую решетку с периодом $\theta_i\varepsilon$ ($i = \overline{1,n}$). В каждом таком параллелепипеде, принадлежащем области Ω, находится множество F_α^ε

$$F_\alpha^\varepsilon = \varepsilon F_{x^\alpha} + x^\alpha, \tag{5}$$

являющееся трансляцией и гомотетическим сжатием множества F_{x^α}.

Области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$, где $F^\varepsilon = \cup_\alpha F_\alpha^\varepsilon$, естественно называть локально периодическими.

Будем говорить, что последовательность функций $u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ к функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, если

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Асимптотическое поведение решения задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ и вид усредненной модели описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть области Ω^ε являются локально периодическими и функция $f^\varepsilon(x)$, продолженная нулем на F^ε, сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$. Тогда обобщенное решение начальной краевой задачи (1) $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ ($p \leqslant 2n/(n-2)$) к обобщенному решению $u(x)$ усредненной краевой задачи*

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

где $\{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ — симметричный положительно определенный тензор, характеризующий проводимость пористой среды, $c(x,u)$ характеризует поглощающие свойства границы ∂F^ε. Эти характеристики среды называют эффективными характеристиками, они равны:
функция поглощения

$$c(x,u) = \frac{|\partial F_x|}{|\Pi|}\sigma(x,u), \tag{7}$$

тензор проводимости $a_{ik}(x)$ ($i,k = \overline{1,n}$)

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik}\left(1 - \frac{|F_x|}{|\Pi|}\right) - \frac{1}{|\Pi|}\int\limits_{\Pi\setminus F_x} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_i(\xi,x)}{\partial \xi_j}\frac{\partial V_k(\xi,x)}{\partial \xi_j} d\xi, \tag{8}$$

где $|\partial F_x|$, $|F_x|$, $|\Pi|$ *— поверхностная и объемные меры соответствующих множеств, функция* $V_k(\xi, x)$ $(k = \overline{1,n})$ *является решением следующей "ячеечной" задачи в области* Π*:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 V_k(\xi)}{\partial \xi_i^2} = 0, \qquad \xi \in \Pi \setminus F_x, \\ \dfrac{\partial V_k(\xi)}{\partial \nu_\xi} = \cos(\nu(\xi), e^k), \qquad \xi \in \partial F_x, \\ V_k|_{\Gamma_i^+} = V_k|_{\Gamma_i^-}, \qquad \dfrac{\partial V_k}{\partial \xi_i}|_{\Gamma_i^+} = \dfrac{\partial V_k}{\partial \xi_i}|_{\Gamma_i^-}, \qquad i = \overline{1,n}, \\ \int\limits_{\Pi \setminus F_x} V_k(\xi)\, d\xi = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\Gamma_i^{\pm}$ *— противоположные грани в* Π*,* $\nu = \nu(\xi)$ *— единичный вектор нормали к* F_x *в точке* $\xi \in F_x$*.*

Напомним, что обобщенным решением задачи (6) называется функция $u^\varepsilon(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f\varphi \right] dx + \int\limits_{\Omega} c(x,u)\varphi d\Gamma = 0, \qquad \forall \varphi(x) \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1 состоит в проверке выполнения условий теоремы 1 работы [7], в которых требуется сходимость к пределу мезоскопических характеристик пористой среды. (Понятие мезоскопических характеристик было введено в [9] и применено в работе [7].)

Цитированная литература

1. *Conca C., Díaz J. I., Liñán A., Timofte C.* Homogenization in chemical reactive flows // Electron. J. Differ. Eq. – 2004. – No 40. – P. 1–22.
2. *Conca C., Díaz J. I., Liñán A., Timofte C.* Homogenization results for chemical reactive flows through porous media // New Trends in Continuum Mechanics. – Bucharest: Publ. of the Theta Foundation, 2005. – Vol. 6. – P. 99–107.
3. *Cioranescu D., Donato P., Zaki R.* Asymptotic behaviour of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Asymptotic Anal. – 2007. – **53**. – P. 209–235.
4. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinear multiphase interactions in a perforated domain // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, No 4. – P. 494–512.
5. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic expansion for the solution of an elliptic problem with boundary multiphase interactions of the Dirichle and Neumann types in a perforated domain // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – **3**. – С. 63–67.
6. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // Asymptotic Anal. – 2011. – **75**. – P. 79–92.
7. *Гончаренко М. В., Хилькова Л. А.* Усредненная модель диффузии в пористой среде с нелинейным поглощением на границе // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1201–1216.
8. *Cabarrubias B., Donato P.* Existence and uniqueness for a quasilinear elliptic problem with nonlinear robin condition // Carpathian J. Math. – 2011. – **27**, No 2. – P. 173–184.
9. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 551 с.

References

1. *Conca C., Díaz J. I., Liñán A., Timofte C.* Electron. J. Differ. Eq., 2004, No 40: 1–22.
2. *Conca C., Díaz J. I., Liñán A., Timofte C.* New Trends in Continuum Mechanics, Bucharest: Publ. of the Theta Foundation, 2005, Vol. 6: 99–107.
3. *Cioranescu D., Donato P., Zaki R.* Asymptotic Anal., 2007, **53**: 209–235.
4. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Ukr. Maht. J., 2009, **61**, No 4: 494–512.
5. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Visn. Kyivs'kogo universutety, 2010, **3**: 63–67.
6. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic Anal., 2011, **75**: 79–92.
7. *Goncharenko M. V., Khilkova L. A.* Ukr. Maht. J., 2015, **67**, No 9: 1201–1216 (in Russian).
8. *Cabarrubias B., Donato P.* Carpathian J. Math., 2011, **27**, No 2: 173–184.
9. *Marchenko V. A., Khruslov E. Ya.* Homogenized models of micro-inhomogeneous media, Kiev: Naukova Dumka, 2005 (in Russian).

Поступило в редакцию 22.10.2015

М. В. Гончаренко[1], **Л. О. Хількова**[2]

[1]Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків
[2]Інститут хімічних технологій Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля, Рубіжне
E-mail: marusya61@yahoo.co.uk, larahil@inbox.ru

Усереднена модель дифузії в локально періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі

Розглянуто крайову задачу, що описує процес стаціонарної дифузії в локально періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку, коли масштаб мікроструктури середовища $\varepsilon \to 0$. Побудовано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики, для коефіцієнтів якого (ефективних характеристик середовища) отримані явні формули.

Ключові слова: Усереднення, дифузія, еліптичне рівняння, третя крайова умова, локально періодична пориста область, функція поглинання, тензор провідності.

M. V. Goncharenko[1], **L. A. Khilkova**[2]

[1]B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
[2]Institute of Chemical Technologies of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Rubizhne
E-mail: marusya61@yahoo.co.uk, larahil@inbox.ru

Homogenized model of diffusion in a locally periodic porous medium with nonlinear absorption at the boundary

We consider a boundary-value problem describing the process of stationary diffusion in a locally periodic porous medium with nonlinear absorption on the boundary. We study the asymptotic behavior of the solution, when the scale of the microstructure of the medium $\varepsilon \to 0$. We have constructed the homogenized equation describing the main term of the asymptotics and deduced explicit formulas for effective characteristics of a medium that are coefficients of this equation.

Keywords: Homogenization, diffusion, elliptic equation, third boundary condition, locally periodic porous medium, absorption function, conductivity tensor.