Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2016

МАТЕМАТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.06.007
УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

Граничное поведение отображений на финслеровых пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучается граничное поведение Q-гомеоморфизмов на финслеровых многообразиях. Формулируются условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий Q-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу.

Ключевые слова: Q-гомеоморфизмы, финслеровы многообразия, граничное поведение.

В данной работе изучается граничное поведение Q-гомеоморфизмов на финслеровых многообразиях, имеющих интересные приложения к теории относительности, физике, механике, математической биологии, а также теории оптимального управления (соответствующие ссылки см. в [1]). Развивая технику модулей применительно к семействам кривых в финслеровых пространствах, мы строим теорию граничного поведения Q-гомеоморфизмов, обладающих геометрическим свойством вида (3), строгое определение которых будет дано в п. 1. Отметим, что поведение Q-гомеоморфизмов на границе в метрическом пространстве изучалось ранее в работе [2] (см. также [3]). Отметим также, что если в (3) функцию Q считать ограниченной п. в. некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$, а в качестве финслерового пространства выбрать n-мерное евклидовое пространство, то мы приходим к классическим квазиконформным отображениям, которые были впервые введены в работах Гретча, Лаврентьева и Морри. Фактически, изучение Q-гомеоморфизмов началось с модульного неравенства (2.5) в [4], которое положило начало в развитии этой теории, в том числе и способствовало изучению граничного поведения таких отображений.

Прежде чем сформулировать основной результат работы, напомним, что *область* в топологическом пространстве T — открытое линейно связное множество. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap D$ связно (ср. [5, с. 232]). Аналогично, говорят, что область D *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap D$ линейно связно.

Напомним также, что *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. Полный набор всех карт многообразия называется его *атласом*.

Многообразие класса C^1 — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны (C^1) образом (см., например, [6, 7]).

Пусть всюду далее D — область в финслеровом пространстве $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geqslant 2$, $T\mathbb{M}^n = \bigcup T_x\mathbb{M}^n$ — касательное расслоение к $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $\forall x \in \mathbb{M}^n$. Будем понимать под *финслеровым многообразием* $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geqslant 2$, — многообразие класса C^1 с заданной на нем финслеровой структурой $\Phi(x, \xi)$, где $\Phi(x, \xi)\colon T\mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^+$ — функция дважды дифференцируемая по ξ при любом $x \in \mathbb{M}^n$, имеющая непрерывные на $T\mathbb{M}^n$ частные производные по ξ до второго порядка включительно и удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\ a > 0$ выполнено $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x, \xi)$ и $\Phi(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;

2) $\forall\ \xi,\ \eta \in TM$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g(x, \xi)\eta_i\eta_j$ положительно определена и ее элементы $g_{ij}(x, \xi)$ — непрерывные функции по x и по ξ, где

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi^2(x, \xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ — \tag{1}$$

матрица Гессе (ср. [8]).

Элемент длины в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geqslant 2$, определяем как дифференциал дуги для бесконечно малого измеримого участка кривой $\gamma \in D$ следующим образом:

$$ds_\Phi^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x, \xi) d\eta_i d\eta_j$$

(см., например, [9]). Под *геодезическим расстоянием* $d_\Phi(x, y)$ понимаем инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки x и y в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geqslant 2$. Известно, что для этой метрики выполняются только две аксиомы метрического пространства (тождественности и неравенства треугольника), а потому финслерово многообразие — квазиметрическое пространство, в котором не выполняется аксиома симметричности расстояния (см., например, [10]). Чтобы финслерово пространство превратить в метрическое, достаточно рассмотреть в качестве метрики $r_\Phi(x, y) = (d_\Phi(x, y) + d_\Phi(y, x))/2$.

В финслеровой геометрии используют различные определения объема: объем по Холмсу–Томпсону, Левнеру, Буземану и т. д. Мы будем придерживаться определения объема по Буземану (Буземану–Хаусдорфу), т. е. элемент *объема* на финслеровом многообразии понимаем следующим образом:

$$d\sigma_\Phi(x) = \sqrt{\det g_{i,j}(x, \xi)}dx^1 \ldots dx^n$$

(ср. [11]). Известно, что объем в финслеровом пространстве совпадает с его хаусдорфовой мерой размерности n, индуцированной метрикой $d_\Phi(x,y)$, если $\Phi(x,\xi)$ — обратимая функция, т. е. $\Phi(x,\xi) = \Phi(x,-\xi)$ (см., например, [12]).

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема о непрерывном продолжении на границу отображения, обратного к Q-гомеоморфизму.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ — компакт, область D' имеет слабо плоскую границу, а $f\colon D \to D'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1}\colon D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{D'} \to \overline{D}$.*

1. Определения и предварительные результаты. Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в области D. *Модуль* семейства Γ задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf \int\limits_D \rho^n(x)\, d\sigma_\Phi(x), \tag{2}$$

где инфимум берется по всем борелевским неотрицательным функциям ρ таким, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее равенство:

$$\int\limits_\gamma \rho\Phi(x,dx) = \int\limits_\gamma \rho ds \geqslant 1.$$

Функции ρ, удовлетворяющие этому условию, называются *допустимыми* для Γ (ср. [8]).

Определение Q-гомеоморфизма. Пусть далее D и D' — области в $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, и пусть $Q\colon \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\cdot \rho^n(x)\, d\sigma_\Phi(x) \tag{3}$$

выполняется для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой борелевой функции ρ семейства Γ. Эта концепция является естественным далекоидущим обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля (см. [13]).

Аналог следующего утверждения впервые был получен на гладких римановых многообразиях в работе [14].

Лемма 1. *Хаусдорфова размерность областей на финслеровых многообразиях $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью n. Кроме того, финслеровы многообразия локально n-регулярны по Альфорсу.*

Таким образом, финслеровы пространства являются локально n-регулярными по Альфорсу, а значит, их хаусдорфова размерность совпадает с их топологической размерностью n (см. [15, с. 62]).

Из леммы 1, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

Следствие 1. *Для любой точки x_0 финслерового многообразия $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1,\infty)$ такие, что*

$$\sigma_\Phi(B(x_0,2r)) \leqslant c\sigma_\Phi(B(x_0,r)) \qquad \forall r \leqslant r_0. \tag{4}$$

В дальнейшем для множеств A, B и C из $(\mathbb{M}^n,\Phi)$, $n \geqslant 2$, символом $\Delta(A,B;C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C, т. е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a,b)$.

Пусть далее D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно. Границу области D будем называть *слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{5}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Будем называть границу области D *сильно достижимой в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Граница области D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы (ср. [3]).

2. Граничное поведение Q-гомеоморфизмов.

2.1. О продолжении на границу обратных отображений. Напомним далее, что

$$\mathrm{E}_0 = C(x_0, f) \colon = \{y \in \mathbb{M}^n_* \colon y = \lim_{k \to \infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in D\}$$

обозначает *предельное множество* отображения f в точке x_0.

По лемме 4 из [2] и лемме 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $f \colon D \to D'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Если область D локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1, f) \bigcap C(x_2, f) = \varnothing$.*

По лемме 2 получаем, в частности, следующее простое, но очень важное заключение.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ — компакт, область D' имеет слабо плоскую границу, а $f \colon D \to D'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1} \colon D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} \colon \overline{D'} \to \overline{D}$.*

2.2. О непрерывном продолжении на границу. Условия на функцию Q в финслеровых пространствах для непрерывного продолжения прямых отображений на границу носят более сложный характер.

По лемме 3 в [2] и лемме 1, в частности, получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть D локально линейно связна в $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f \colon D \to D'$ — Q-гомеоморфизм такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$, $Q \colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon}(r_\Phi(x, x_0))\, d\sigma_\Phi(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{6}$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} r_\Phi(x, x_0)$, $D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D \colon \varepsilon < r_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{7}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.

Следствие 2. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon<r_\Phi(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(r_\Phi(x,x_0))\,d\sigma_\Phi(x)<\infty, \tag{8}$$

где $\psi(t)$ *— неотрицательная измеримая функция на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt<\infty \qquad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$, *то* Q*-гомеоморфизм* $f\colon D\to D'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* $(\mathbb{M}^n_*,\Phi^*)$.

Теорема 2. *Пусть* D *и* D' *— области в* $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ *и* $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$, $n\geqslant 2$, *соответственно,* D *локально линейно связна в точке* $x_0\in\partial D$, $\overline{D'}$ *— компакт и граница* D' *сильно достижима. Если измеримая функция* $Q\colon\mathbb{M}^n\to(0,\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{Q(x)d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x,x_0)^n}=o\Bigg(\bigg[\log\frac{1}{\varepsilon}\bigg]^n\Bigg) \tag{9}$$

при $\varepsilon\to 0$, *где*

$$D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)=\{x\in D\colon \varepsilon<r_\Phi(x,x_0)<\varepsilon_0\}$$

для $\varepsilon_0<d(x_0)=\sup\limits_{x\in D}r_\Phi(x,x_0)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f\colon D\to D'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$.

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы остается в силе, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int\frac{Q(x)\,d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x,x_0)^n} \tag{10}$$

в окрестности точки x_0 *в смысле главного значения.*

Пусть $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ — финслерово многообразие, $n\geqslant 2$. Будем говорить, что функция φ: $\mathbb{M}^n\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0\in\mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi\in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\widetilde{\varphi}_\varepsilon|\,d\sigma_\Phi(x)<\infty \qquad \forall x_0\in\mathbb{M}^n, \tag{11}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon=\frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,d\sigma_\Phi(x)\,— \tag{12}$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{M}^n\colon r_\Phi(x,x_0)<\varepsilon\}$ относительно меры объема σ_Φ. Пишем также $\varphi\in FMO$, если $\varphi\in FMO(x_0)$ для всех $x_0\in\mathbb{M}^n$.

Комбинируя лемму 2 в [2] и леммы 1 и 3 (см. выше), приходим к следующим заключениям.

Теорема 3. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а замыкание $\overline{D'}$ компактно. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.*

Следствие 4. *Пусть D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а $\overline{D'}$ компактно. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\sigma_\Phi(x) < \infty,$$

то любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.

Теорема 4. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ сильно достижима, $\overline{D'}$ компактно. Если Q принадлежит FMO, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

2.3. Гомеоморфное продолжение на границу. Комбинируя результаты предыдущих пунктов, получаем следующие теоремы.

Лемма 4. *Пусть D локально связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если функция $Q \in L^1(D)$ удовлетворяет условию (6) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Теорема 5. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D и D' имеют слабо плоские границы, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты и пусть $Q\colon \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ — функция класса $L^1(D)$ с*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\,d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x,x_0)^n} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{13}$$

в каждой точке $x_0 \in \partial D$, где

$$D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in D\colon \varepsilon < r_\Phi(x,x_0) < \varepsilon_0\},$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} r_\Phi(x,x_0)$. Тогда любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 5 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x,x_0)^n} \tag{14}$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Теорема 6. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geqslant 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если Q принадлежит классу FMO, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Таким образом, результаты работы распространяют (и усиливают) хорошо известные теоремы М. Вуоринена, Дж. Вяйсяля, Ф. Геринга, О. Мартио, Р. Някки, У. Сребро, Э. Якубова и др. о квазиконформных отображениях в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, на Q-гомеоморфизмы в финслеровых пространствах.

Цитированная литература

1. *Афанасьева Е. С.* Граничное поведение Q-гомеоморфизмов в финслеровых пространствах // Укр. мат. вестн. – 2015. – **12**, № 3. – С. 311–325.
2. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics).
4. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci.. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – Москва: Мир, 1969. – 623 с.
6. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 307 с.
7. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия,. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 384 с.
8. *Дымченко Ю. В.* Соотношение между емкостью конденсатора и модулем семейства разделяющих поверхностей в финслеровых пространствах // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2013. – **418**. – С. 74–89.
9. *Rutz S. F., Paiva F. M.* Gravity in Finsler spaces // Finslerian Geometries: A Meeting of Minds. – Dordrecht: Kluwer, 2000. – P. 223–244.
10. *Bao D., Chern S., Shen Z.* An Introduction to Riemann–Finsler Geometry. – New York: Springer, 2000. – 435 p.
11. *Rund H.* The differential geometry of Finsler spaces. – Berlin: Springer, 1959. – 284 p.
12. *Cheng X., Shen Z.* Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – 150 p.
13. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. – Berlin: Springer, 1971. – 152 p. – (Lecture Notes in Mathematics; Vol. 229.).
14. *Афанасьева Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1299–1313.
15. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001. – 140 p.

References

1. *Afanasieva E. S.* Ukr. mat. vestnik, 2015, **12**, No 3: 311–325 (in Russian).
2. *Ryazanov V. I., Salimov R. R.* Ukr. mat. vestnik, 2007, **4**, No 2: 199–234 (in Russian).
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.
4. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* Int. J. Math. Math. Sci., 2003, **22**: 1397–1420.
5. *Kuratovskij K.* Topologija, Vol. 2, Moscow: Mir, 1969 (in Russian).
6. *Kartan E.* Rimanova geometrija v ortogonal'nom repere, Moscow: Izd-vo Mosc. Univ., 1960 (in Russian).
7. *Poznyak E. G., Shikin E. V.* Differencial'naja geometrija, Moscow: Izd-vo Mosc. Univ., 1990 (in Russian).
8. *Dimchenko Yu. V.* Zap. nauchn. semin. POMI, 2013, **418**: 74–89 (in Russian).
9. *Rutz S. F., Paiva F. M.* Finslerian Geometries: A Meeting of Minds, Dordrecht: Kluwer, 2000: 223–244.
10. *Bao D., Chern S., Shen Z.* An Introduction to Riemann–Finsler Geometry, New York: Springer, 2000.
11. *Rund H.* The differential geometry of Finsler spaces, Berlin: Springer, 1959.

12. *Cheng X., Shen Z.* Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces, Berlin; Heidelberg: Springer, 2012.
13. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Berlin: Springer, 1971.
14. *Afanasieva E. S.* Ukr. mat. zhurn., 2011, **63**, No 10: 1299–1313 (in Russian).
15. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces, New York: Springer, 2001.

Поступило в редакцию 06.11.2015

О. С. Афанасьєва

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

Гранична поведінка відображень на фінслерових просторах

Вивчається гранична поведінка Q-гомеоморфізмів на фінслерових многовидах. Формулюються умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, при яких всякий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу.

Ключові слова: Q-гомеоморфізми, фінслерови многовиди, гранична поведінка.

O. S. Afanasieva

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk

E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

The boundary behavior of mappings on Finsler spaces

The boundary behavior of Q-homeomorphisms on Finsler manifolds is studied. The conditions on a function $Q(x)$ and on the boundaries of domains, when every Q-homeomorphism has a continuous or homeomorphic extension to the boundary, are formulated.

Keywords: Q-homeomorphisms, Finsler manifolds, boundary behavior.