

Н. В. Никитина

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: center@inmech.kiev.ua

Связь топологии поля системы в вариациях с характером аттракторов

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводится анализ поля системы в вариациях и его влияние на характер аттракторов.

Ключевые слова: nonlinear systems, bifurcation, periodic orbit, strange attractor.

Постановка задачи. Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $F(x)$ — гладкая векторная функция, определенная на некотором подмножестве пространства \mathbb{R}^n .

Введем в рассмотрение малое отклонение δx_i ($i = 1, 2, 3$) в окрестности частного решения $\bar{x}_i(t)$ уравнений (1) $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Примем δx_i в качестве новых координат. Для линейной системы, $d\delta x/dt = \mathcal{A}(\bar{x})\delta x$, $\delta x \in \mathbb{R}^3$, где $\mathcal{A}(\bar{x}) = \partial F/\partial x|_{x=\bar{x}}$, соответствующей системе (1), которая является *системой уравнений в вариациях* [1], составим характеристическое уравнение $f(\lambda, \bar{x}) = 0$ матрицы $\mathcal{A}(\bar{x})$. С помощью характеристического уравнения системы в вариациях можно получить характеристические показатели (ХП) любой точки трехмерного пространства системы (1), включая особые точки.

Пусть характеристическое уравнение трехмерной системы в вариациях $f(\lambda, \bar{x}) = 0$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ зависит лишь от одной переменной \bar{x}_1 ; и если имеет место условие

$$f(\lambda, \bar{x}_1) = f(\lambda, -\bar{x}_1), \quad (2)$$

то поле системы $d\delta x/dt = \mathcal{A}(\bar{x})\delta x$ обладает симметрией. Приведем условие кососимметрии для траектории двумерной системы вида (1), которое потребуется далее

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2). \quad (3)$$

Вопросы, связанные с существованием аттракторов, рассматривались многими авторами [2–4]. Для регулярного аттрактора это может быть замкнутая кривая, которая обладает какой-либо симметрией. Если нет симметрии и аттрактор асимметричен, то образование регулярного аттрактора связано с притягивающим характером круговой траектории. В работе рассмотрен бифуркационный процесс на основе изучения векторного поля системы в вариациях. Размерность поля определяется характеристическим уравнением системы в вариациях. Вычисляются ХП точек в определенной области и на кривой.

Теорема о существовании регулярного аттрактора. Рассмотрим случай, где существуют три особые точки.

Предположение 1. Система (1) имеет три особые точки: точка $O(0, 0, 0)$ — седлофокус с седловой величиной $\sigma_O = 2 \operatorname{Re} \lambda_{1,2} + \lambda_3 \geq 0$; $\lambda_3 > 0$; седлофокусные $A(\sqrt{a/b}, 0, -\sqrt{a/b})$, $B(-\sqrt{a/b}, 0, \sqrt{a/b})$; $\sigma_{A,B} = 2 \operatorname{Re} \lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$; $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$; $\lambda_3 < 0$ (здесь a, b — положительные параметры). Система (1) имеет управляющие параметры (α, β) , которыми можно регулировать топологическую характеристику особых точек. Характеристическое уравнение системы в вариациях удовлетворяет условию (2). Симметричное поле точек характеристического уравнения трехмерной системы в вариациях, которое зависит от одной переменной x_1 , обладает симметрией относительно частного решения \bar{x}_1 .

Предположение 2. На одной из координатных плоскостей система (1) имеет круговую диссипативную кривую (траекторию с периодической составляющей и диссипацией). На двух других плоскостях имеют место особые устойчивые ненулевые точки.

Предположение 3. Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям кососимметрии (3) в трех координатных плоскостях: Ox_1x_2 , Ox_1x_3 , Ox_2x_3 .

Теорема. Пусть для дифференциальной системы (1) справедливы предположения 1–3. Тогда в окрестности особых трех точек O, A, B существует замкнутая интегральная кривая, имеющая кососимметрию в проекциях на три координатные плоскости.

Доказательство. Для возникновения предельного цикла круговая траектория должна уходить от окрестности нуля. Это происходит при наличии устойчивых особых точек на координатных плоскостях (предположение 2). Выполнение условий (3) для двумерных систем в трех координатных плоскостях вызывают не только кососимметрию проекций, но и замыкание трехмерной траектории (предположение 3). При определенных значениях параметров в системе (1) существует замкнутая траектория относительно трех особых точек. Особые седлоузловые точки имеют определенные ХП, указанные в предположении 1. Таким образом, устанавливается существование регулярного аттрактора. Попадание траектории на аттрактор происходит при определенных начальных условиях.

В рамках предположений 1–3 особые точки A и B могут порождать:

- 1) два регулярных аттрактора (две замкнутые несимметричные траектории относительно точек A и B);
- 2) хаотические траектории без перехода из области относительно одной особой точки в область относительно другой особой точки;
- 3) хаотические траектории с переходом из области в область.

Данная работа посвящена анализу хаотических траекторий системы (пункты 2, 3) и установлению причины возникновения хаотических траекторий без перехода из области относительно одной особой точки в область относительно другой особой точки. Проведен также сравнительный анализ с хаотическим аттрактором системы Лоренца.

Аттракторы генератора Чуа. Динамика цепи Чуа нашла отражение во многих работах [5–7]. Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных безразмерных уравнений Чуа

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y), \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (4)$$

Параметры α, β — положительные управляющие параметры; a, b примут следующие значения: $a = 1/6, b = 1/16$. Система (4) имеет три состояния равновесия: особая точка $O(0, 0, 0)$, особые точки $A(x_A = \sqrt{a/b}, y_A = 0, z_A = -\sqrt{a/b})$, $B(x_B = -\sqrt{a/b}, y_B = 0, z_B = \sqrt{a/b})$.

В работе [8] обсуждались вопросы мультистабильности и существования предельного цикла с симметрией системы (4) (согласно теореме). Система в вариациях и характеристическое уравнение системы в вариациях, соответствующие системе (4), имеют вид

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y), \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y + \delta z, \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y,$$

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) = 0.$$

Траектория замыкается в силу теоремы, если исключено влияние особых точек A, B системы (4). В работе [8] приведены изображения трехмерной кривой на плоскостях xz, xy, yz .

Векторное поле на плоскости xz имеет ось симметрии, которая проходит по оси Oz . Векторное поле системы в вариациях не может быть кососимметричным, так как изменяется лишь в зависимости от одной координаты — x . Ось Oz — лишь геометрическая граница областей влияния особых точек A, B . При переходе через ось Oz траектория не претерпевает разрыва.

Введем в точке A систему координат $Auvw$ и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{dv}{dt} = \alpha\left(-2av - bv^2\left(3\sqrt{\frac{a}{b}} + v\right) + y\right), \quad \frac{dy}{dt} = v - y + w, \quad \frac{dw}{dt} = -\beta y, \quad (5)$$

где $v = x - \sqrt{a/b}$, $w = z + \sqrt{a/b}$. Введем в точке B систему координат $Bsyu$ и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{ds}{dt} = \alpha\left(-2as - bs^2\left(-3\sqrt{\frac{a}{b}} + s\right) + y\right), \quad \frac{dy}{dt} = s - y + u, \quad \frac{du}{dt} = -\beta y, \quad (6)$$

где $s = x + \sqrt{a/b}$, $u = z - \sqrt{a/b}$.

Точки A, B могут организовывать замкнутые кривые, исключая точку O . Изменением значений параметров α, β можно добиться, чтобы траектории, замкнутые относительно A и B , не переходили из области в область. Введем малые отклонения $\delta v, \delta y, \delta w$ от частных решений $\bar{v}, \bar{y}, \bar{w}$ системы (5) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta v}{dt} = \alpha\left(-2a\delta v - 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v}\delta v - 3b\bar{v}^2\delta v + \delta y\right), \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta v - \delta y + \delta w, \quad \frac{d\delta w}{dt} = -\beta\delta y.$$

Такую же процедуру проведем в системе (6). Характеристические уравнения, соответствующие системам в вариациях, имеют вид

$$\lambda^3 + \lambda^2\left(1 + \alpha\left(2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2\right)\right) + \lambda\left(\alpha\left(2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2 - 1\right) + \beta\right) +$$

$$+ \alpha\beta\left(2a + 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{v} + 3b\bar{v}^2\right) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda^3 + \lambda^2\left(1 + \alpha\left(2a - 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{s} + 3b\bar{s}^2\right)\right) + \lambda\left(\alpha\left(2a - 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{s} + 3b\bar{s}^2 - 1\right) + \beta\right) +$$

$$+ \alpha\beta\left(2a - 6b\sqrt{\frac{a}{b}}\bar{s} + 3b\bar{s}^2\right) = 0.$$

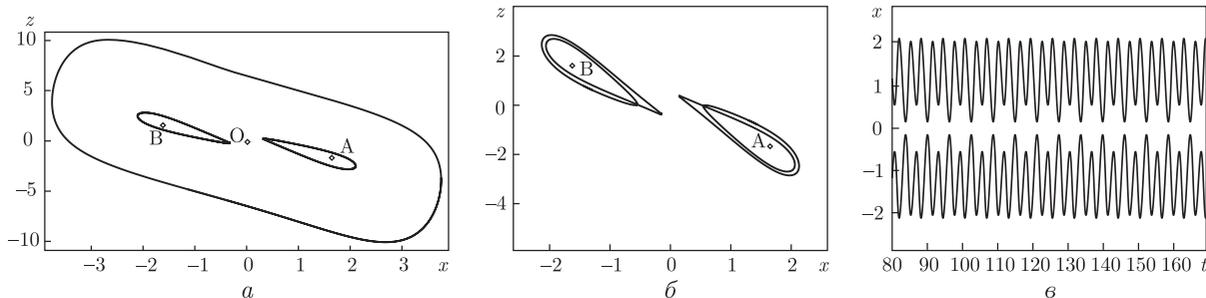


Рис. 1

Особые точки A, B имеют ХП согласно характеристическим уравнениям (7)

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + 2a\alpha) + \lambda(\alpha(2a - 1) + \beta) + 2a\alpha\beta = 0.$$

Отметим, что уравнениям (5) и (6) на одной из плоскостей (плоскость y, w в системе (5), плоскость yu в системе (6)) соответствует круговая траектория $\ddot{y} + \dot{y} + \beta y = 0$. При начальных возмущениях

$$\begin{aligned} |v(0)| < \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad |y(0)| \geq 0, \quad |w_O(0)| < \sqrt{\frac{a}{b}}, \\ |s(0)| < \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad |y(0)| \geq 0, \quad |u_O(0)| < \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (8)$$

в системе доминирует движение под влиянием особой точки A либо B . Введем начальные возмущения вида (8), которые включают влияние особых точек A, B . При значениях управляющих параметров: $\alpha = 6,1$; $\alpha = 6,2$; $\beta = 9,2$. Траектория замыкается относительно точек A либо B (рис. 1, $a, б, в$). Увеличение периода связано с попаданием изображающей точки в область, где скорость перемещения близка к нулю [8].

Рассмотрим несимметричные аттракторы Чуа. Пусть выполняются условия на начальные возмущения вида (8). Система Чуа образует замкнутые интегральные кривые относительно особых точек A, B (рис. 2, a). Вертикальная полоса, выделенная штриховыми линиями, содержит узлофокусные точки ($\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$; $\lambda_3 < 0$; $(\alpha, \beta) = (6,1; 9,2)$). Остальные точки замкнутой траектории (интервалы точек траектории 2–3; 4–1) содержат седлофокусные точки ($\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$; $\lambda_3 < 0$; $\sigma = \text{Re } \lambda_1 + \text{Re } \lambda_2 + \lambda_3 < 0$). Заметим, что в интервале точек 4–1 имеет место $|\text{Re } \lambda_{1,2}| \ll 1$. Анализ ХП точек замкнутой кривой относительно особых точек A, B показывает, что замыкание траектории вписывается в следующее утверждение.

Утверждение. Пусть траектория состоит из узлофокусных точек ($\text{Re } \lambda_{(1,2)j}^u < 0$, $\lambda_{3j} < 0$), из седлофокусных точек ($\text{Re } \lambda_{(1,2)j}^v > 0$, $\lambda_{3j} < 0$). Тогда траектория порождает предельный цикл, если интегральная сумма $\text{Re } \lambda_{(1,2)j}^u + \text{Re } \lambda_{(1,2)j}^v + \lambda_{3j} < 0$ по всем точкам круговой траектории меньше нуля.

Рассмотрим кривую относительно точек O, A, B ($(\alpha, \beta) = (6,2; 8,8)$), которая замыкается согласно кососимметрии проекций (рис. 2, $б$). Справа и слева относительно нуля располагаются симметричные области L, M, N отделенные друг от друга вертикальными штриховыми прямыми. Область L (справа и слева) заполнена узлофокусными точками ($\text{Re } \lambda_{1,2}^l < 0$; $\lambda_3^l < 0$); область M — седлофокусными ($\text{Re } \lambda_{1,2}^m > 0$; $\lambda_3^m < 0$); область N — узлофокусными ($\text{Re } \lambda_{1,2}^n < 0$; $\lambda_3^n < 0$). Во всех точках $\sigma < 0$. Окрестность нуля (особая точка O) имеет весьма

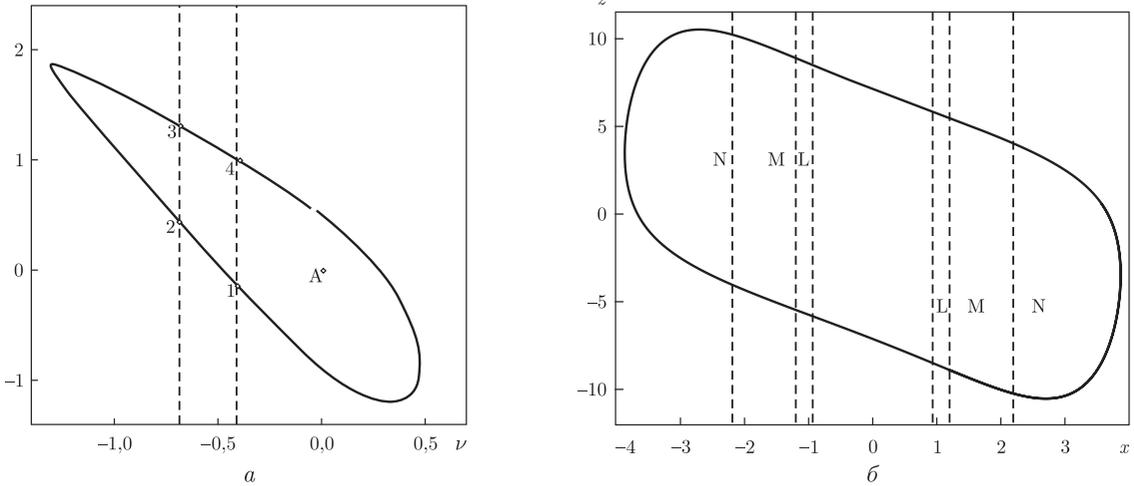


Рис. 2

узкую полосу, в которой седлофокусные точки ($\text{Re } \lambda_{1,2}^o < 0$; $\lambda_3^o > 0$; $\sigma > 0$). Далее в окрестности нуля (между областями L справа, слева) устанавливаются седлофокусные точки: $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$; $\lambda_3 > 0$ $\sigma < 0$. Траектория замыкается относительно точек O , A , B вследствие кососимметрии. Запишем неравенства, которые определяют притяжение траектории

$$\sum_{(j)} (2(\text{Re } \lambda_{(1,2)j}^l + \text{Re } \lambda_{(1,2)j}^m + \text{Re } \lambda_{(1,2)j}^n + \text{Re } \lambda_{(1,2)j}^o) + \lambda_{(3)j}^l + \lambda_{(3)j}^m + \lambda_{(3)j}^n + \lambda_{(3)j}^o) < 0, \quad (9)$$

Здесь области L , M , N и область относительно нуля считаем справа и слева. Узкая область при нуле — одна. Существование притягивающего характера траектории несимметричного цикла обеспечивает замыкание траектории. Для симметричного случая приводится теорема о существовании периодического процесса, тогда неравенства (9) являются альтернативным условием, а именно: если выполняются неравенства (9) система имеет притягивающий характер периодической траектории.

Так как поле, порожденное системой в вариациях, не имеет разрыва на плоскостях xz , vw , то переход траектории из области в область (особых точек A , B) происходит гладко. Известно [8], что в вертикальной полосе плоскости xz , где находится особая точка O , изображающая точка теряет скорость, это приводит к хаосу (через каскад кратного увеличения периода). Хаос возникает как нерегулярность бифуркаций при периодическом движении. Вначале возникает хаос без перехода из области в область (рис. 3, a , b ; $(\alpha, \beta) = (6, 25; 9)$). Хаос порожден замедлением изображающей точки и гладкостью функции решения. Последнее качество позволяет при наибольших отклонениях траектории относительно точек A , B заходить в геометрическую область точек B , A (рис. 3, b). Аттрактор еще сохраняет ориентацию относительно точки A (либо B) за счет небольшого избыточного протяжения. На рис. 4, a , b $(\alpha, \beta) = (6, 4; 9)$ приведен хаос с переходом из области в область. В работе [9] рассматривается хаотический аттрактор Лоренца. В точке перехода обнаружен разрыв решения. Уравнения в вариациях в задаче Лоренца зависят от трех частных решений. Топология пространства, порожденного системой в вариациях Лоренца сильно отличается от одномерного пространства системы в вариациях генератора Чуа [9].

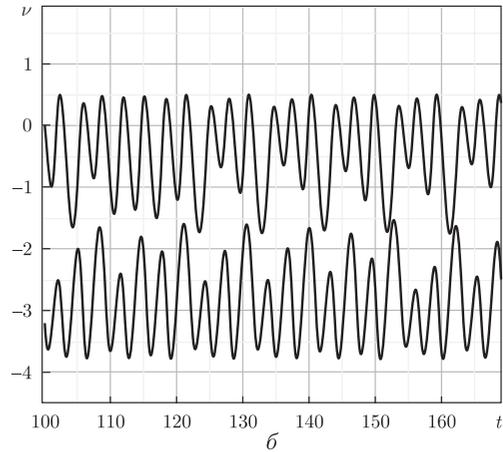
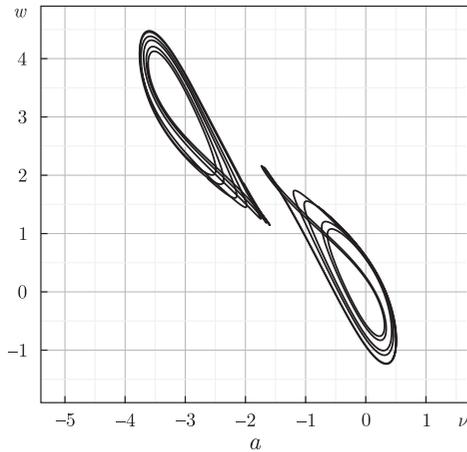


Рис. 3

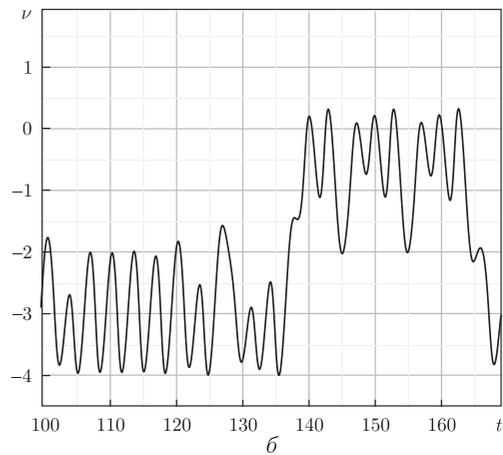
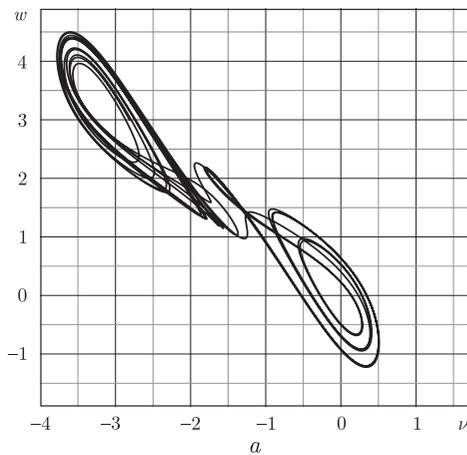


Рис. 4

Заключение. Поле генератора Чуа, порожденное системой в вариациях зависит от одной переменной. Согласно утверждению качество ХП точек этого простого поля определяет притягивающий характер траектории несимметричного цикла. Два несимметричных предельных цикла, переходя один в другой, образуют хаотическую траекторию. Переход траектории из одной области в другую является гладким. В случае хаотической системы Лоренца нарушается гладкость при переходе из области в область.

Неравенство (9) определяет притягивающий характер симметричного аттрактора Чуа и является альтернативным признаком существования предельного цикла. Генератор имеет аттрактор согласно теореме, которая указывает на кососимметричный характер проекций. Это является геометрическим условием замыкания.

В данной работе, а также в работах [8, 9] изучается бифуркационный процесс трехмерной системы в силу характеристического уравнения системы в вариациях. Бифуркационный процесс устанавливает границы областей, имеющих определенные качества ХП точек.

Цитированная литература

1. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 p.

2. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 p.
3. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St.-Petersburg Univ. Press, 2008. – 160 p.
4. *Neimark Yu. I., Landa P. S.* Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
5. *Anishechenro V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Wu C. W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, No 6. – P. 1677–1699.
6. *Khibnik A. I., Roose D., Chua L.* Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos. – Singapore: World Scientific, 1993. – 145 p.
7. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // Int. J. Bifurcations and Chaos. – 2001. – **1**, No 1. – P. 139–182.
8. *Мартинюк А. А., Нікітіна Н. В.* О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 2. – С. 268–280.
9. *Нікітіна Н. В.* О характеристических показателях Ляпунова // Доп. НАН України. – 2015. – № 8. – С. 64–71.

References

1. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I., Singapore: World Scientific, 1998.
2. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II., Singapore: World Scientific, 2001.
3. *Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. St. Petersburg Univ. Press, 2008.
4. *Neimark Yu. I., Landa P. S.* Stochastic and Chaotic Oscillations, Dordrecht: Kluwer, 1992.
5. *Anishechenro V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Wu C. W., Chua L.* Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1995, **5**, No 6: 1677–1699.
6. *Khibnik A. I., Roose D., Chua L.* Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos, Singapore: World Scientific, 1993.
7. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L., Hotta A.* Int. J Bifurcations and Chaos, 2001, **1**, No 1: 139–182.
8. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Nonlinear Oscillations, 2014, **17**, No 2: 268–280 (in Russian).

Поступило в редакцію 20.11.2015

Н. В. Нікітіна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Зв'язок топології поля системи у варіаціях із характером аттракторів

Наводиться аналіз поля системи у варіаціях і його вплив на характер аттракторів.

Ключові слова: нелінійна система, бифуркація, орбитальна нестійкість, дивний аттрактор.

N. V. Nikitina

S. P. Timoshenko Institute of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Connection of the topology of a system in variations with the character of attractors

The analysis of the field of a system in variations and its influence on the nature of attractors is presented.

Keywords: nonlinear systems, bifurcation, orbital loss of stability, strange attractor.