



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.022>

УДК 517.9,519.2

В. П. Кнопова¹, О. М. Кулик²

¹Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

²Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Побудова процесу типу Леві за допомогою методу параметриксу

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Для широкого класу інтегро-диференціальних операторів ми доводимо, що $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ -замикання кожного з таких операторів є генератором напівгрупи, що відповідає феллеровому процесу Маркова. Для щільності ймовірності переходу такого процесу отримано зображення у вигляді ряду та наведено верхню та нижню оцінки. Метод доведення істотним чином базується на узагальненні методу параметрикса для параболічної задачі Коші з псевдодиференціальними операторами.

Ключові слова: щільність перехідної ймовірності, процесу типу Леві, псевдодиференціальний оператор, метод параметрикса Леві.

Процес Маркова $X = (X_t)_{t \geq 0}$ зі значеннями в \mathbb{R}^n називається *процесом типу Леві*, якщо генератор A його $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ -напівгрупи є коректно визначеним на просторі $C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$ двічі неперервно диференційовних функцій, що спадають на нескінченності разом з похідними першого та другого порядків, та на цьому просторі A збігається з псевдодиференціальним оператором типу Леві

$$Lf(x) = a(x) \cdot \nabla f(x) + \sum_{j,k=1}^n Q_{jk}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (f(x+u) - f(x) - \nabla f(x) \cdot u 1_{\{\|u\| \leq 1\}}) \mu(x, du). \quad (1)$$

Тут $a(x) \in \mathbb{R}^n$, $Q(x) \equiv (Q_{jk}(x))_{j,k=1}^n$ є симетричною додатно напіввизначеною матрицею, та $\mu(x, \cdot)$ є додатною борелевою мірою, що задовольняє умові

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (1 \wedge \|u\|^2) \mu(x, du) < \infty \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}^n.$$

У випадку, коли функції a , Q та ядро μ не залежать від x , (1) є зображенням генератора напівгрупи, що відповідає процесу Леві. Таким чином, процеси типу Леві мають природню інтерпретацію як “процеси з локально незалежними приростами”, характеристичний триплет яких залежить від просторової змінної. Цей факт пояснює назви *процес типу Леві* та *оператор типу Леві*. Зауважимо, що зв’язок між процесами Леві та процесами типу Леві є подібним до зв’язку між броуновим рухом та дифузійними процесами. З іншого боку, теорема Курежа–Вальденфельса (Courgé–von Waldenfels, див. Jacob [1, теор. 4.5.21]) стверджує, що довільний феллерів процес, генератор $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ -напівгрупи якого є коректно визначеним на $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (просторі нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм), є процесом типу Леві. Таким чином, процеси типу Леві є найбільш типовою формою феллерових процесів в \mathbb{R}^n , а інтегро-дифференціальні оператори виду (1) природним чином пов’язані з генераторами таких процесів.

Дана стаття мотивована природною та складною задачею про побудову процесу типу Леві за заданим інтегро-дифференціальним оператором (1).

Існує кілька способів побудови процесу Маркова за заданим оператором типу Леві (1). Одним із таких способів є доведення існування єдиного розв’язку *мартингальної задачі* для оператора $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$. Складна частина цього підходу полягає в тому, щоб довести, що мартингальна задача є *коректно поставленою*, тобто що сімейство ймовірнісних мір \mathbb{P}^x , $x \in \mathbb{R}^n$ є єдиним. Такий підхід було розвинуто в роботах [2–7], див. також оглядову статтю Bass [8] та монографію Jacob [9]. Але, хоча підхід доведення єдиності розв’язку мартингальної задачі є ефективним у конструктивному плані, він не дає жодної інформації щодо властивостей розподілу побудованого процесу.

Інший підхід, який розвивається у даній статті, є узагальненням класичного методу побудови дифузійного процесу, основні кроки якого ми коротко описуємо далі. У випадку параболічного оператора, тобто коли інтегральна частина в (1) відсутня, класичний *метод параметриксу* дозволяє побудувати фундаментальний розв’язок $p_t(x, y)$ задачі Коши для оператора

$$\partial_t - L. \tag{2}$$

Метод параметриксу було вперше запропоновано в роботі [10] та використано у роботі [11] для побудови дифузійного, чисто розривного, та комбінованих процесів; див. також монографію [12], в якій цей метод детально описаний. Ідея, що лежить в основі методу, полягає в тому, щоб обрати “нульову апроксимацію” $p_t^0(x, y)$ та за допомогою цієї апроксимації побудувати зображення функції $p_t(x, y)$ у вигляді ряду. В дифузійній ситуації вдається показати, що побудована функція дійсно є фундаментальним розв’язком задачі Коши для (2). Оскільки оператор L задовольняє *принцип максимуму*, це дозволяє стандартним чином (див. [13, с. 165] або Jacob [1, заув. 4.5.14]) показати, що $p_t(x, y)$ є перехідною ймовірнісною щільністю феллерового процесу, звуження генератора напівгрупи якого дорівнює L на функціях класу $C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$.

Опишемо основні кроки у нашому методі побудови процесу типу Леві. Першу частину методу присвячено побудові “кандидата на фундаментальний розв’язок” задачі Коші для оператора $\partial_t - L$, тобто такої функції $p_t(x, y)$, що

$$p_t(x, \cdot) \rightarrow \delta_x \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0+, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

та

$$(\partial_t - L)p_t(x, y) = 0, \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Наведемо конструкцію, що лежить в основі класичного методу параметрикса, див. [12, с. 310–311] та [14 с.144–145].

Розглянемо *деяку* апроксимацію нульового порядку $p_t^0(x, y)$ функції $p_t(x, y)$ та позначимо через $r_t(x, y)$ залишковий доданок, отриманий при такій апроксимації, тобто

$$p_t(x, y) = p_t^0(x, y) + r_t(x, y). \quad (5)$$

Покладемо

$$\Phi_t(x, y) := (L - \partial_t)p_t^0(x, y), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Оскільки ми припустили, що $p_t(x, y)$ є фундаментальним розв’язком задачі Коші для оператора $\partial_t - L$, то

$$(\partial_t - L)r_t(x, y) = \Phi_t(x, y).$$

Отже, $r_t(x, y) = (p \star \Phi)_t(x, y)$, де \star позначає операцію згортки

$$(f \star g)(t, x, y) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(t - \tau, x, z)g(\tau, z, y) dz d\tau,$$

що дозволяє за допомогою (5) записати рівняння для $r_t(x, y)$:

$$r_t(x, y) = (p^0 \star \Phi)_t(x, y) + (r \star \Phi)_t(x, y).$$

Формально розв’язком цього рівняння є вираз

$$r = p^0 \star \Psi, \quad (7)$$

де

$$\Psi_t(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_t^{\star k}(x, y). \quad (8)$$

При правильному виборі апроксимації нульового порядку $p_t^0(x, y)$ ми доводимо, що ряд (8) збігається абсолютно при $t > 0$ $x, y \in \mathbb{R}^n$ і вираз (5) має сенс.

Технічно найбільш складним є питання про адекватність наведеної вище конструкції. На відміну від дифузійного випадку функція $p_t(x, y)$, що побудована вище, не є класичним фундаментальним розв’язком для (2), що не дозволяє відтворити описаний вище метод

доведення напівгрупових властивостей. Ми долаємо цю принципову перешкоду за допомогою підходу, що базується на використанні допоміжного об'єкта, а саме *апроксимативного фундаментального розв'язку*, що являє собою апроксимацію $p_{t,\epsilon}(x, y)$ побудованого ядра $p_t(x, y)$. Позначимо

$$T_{t,\epsilon}f(x) = \int_{\mathbb{R}}^n f(y)p_{t,\epsilon}(x, y) dy, \quad t, \epsilon > 0, \quad (9)$$

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}}^n f(y)p_t(x, y) dy, \quad t, \epsilon > 0, \quad (10)$$

Використовуючи зображення для $p_t(x, y)$ та оцінки на $\Phi_t(x, y)$ та $\Psi_t(x, y)$, ми покажемо, що для довільної $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

а) сімейство функцій $T_{t,\epsilon}f(x)$, $\epsilon > 0$ апроксимує $T_t f(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ рівномірно на компактних підмножинах $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

б) при $t, \epsilon \rightarrow 0$ функція

$$Q_{t,\epsilon}f(x) := (\partial_t - L)T_{t,\epsilon}f(x),$$

прямує до нуля, рівномірно на компактних підмножинах $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$; тобто функції виду $T_{t,\epsilon}f(x)$, $\epsilon > 0$, перетворює рівність (4) у “апроксимативну рівність”.

Такий “апроксимативний” аналог властивостей (3), (4) є значно простішим у доведенні ніж самі ці властивості. З іншого боку, він є достатньо потужним для того, щоб гарантувати шукані напівгрупові властивості функції $p_t(x, y)$: ми показуємо, що класичний підхід, який використовує принцип максимуму, може бути ефективно адаптованим до застосування у такій “апроксимативній” ситуації.

Сформулюємо основні результати дослідження.

Надалі ми припускаємо, що ядро $\mu(x, du)$ має вигляд $\mu(x, du) = m(x, u)\mu(du)$, де $m(x, u)$ — деяка функція, умови на яку буде накладено нижче, а μ — міра Леві, тобто борельова міра, така, що

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (\|u\|^2 \wedge 1)\mu(du) < \infty.$$

Позначимо

$$q(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (1 - \cos(\xi \cdot u))\mu(du) \quad (11)$$

та

$$q^U(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} [(\xi \cdot u)^2 \wedge 1]\mu(du), \quad q^L(\xi) := \int_{|u \cdot \xi| \leq 1} (\xi \cdot u)^2 \mu(du). \quad (12)$$

Неважко показати, що має місце нерівність

$$(1 - \cos 1)q^L(\xi) \leq q(\xi) \leq 2q^U(\xi). \quad (13)$$

Крім того, функція $q(\xi)$ є характеристичною експонентою процесу Леві. Припустимо, що міра μ задовольняє наступній умові.

A1. Існує $\beta > 1$ таке, що

$$\sup_{l \in \mathbb{S}^n} q^U(l) \leq \beta \inf_{l \in \mathbb{S}^n} q^L(l) \quad \text{для всіх достатньо великих } r.$$

Позначимо також

$$\alpha := \frac{2}{\beta}. \tag{14}$$

Таке позначення мотивоване частковим прикладом симетричної α -стійкої міри Леві $\mu(du) := c(\alpha) \|u\|^{-n-\alpha} du$, $\alpha \in (0, 2)$. А саме, безпосередньо перевіряється, що для цієї міри Леві умова **A1** має місце з $\beta = 2/\alpha$. Також можна показати, що з умови **A1** випливає, що відповідна характеристична експонента q має поліноміальну нижню оцінку при великих значеннях $\|\xi\|$, яка для симетричного α -стійкого процесу перетворюється на рівність:

$$q(\xi) \geq c_0 \|\xi\|^\alpha, \quad \|\xi\| \geq 1. \tag{15}$$

Ми припускаємо, що функція $m(x, u)$ та коефіцієнт зсуву $a(x)$ задовольняють наступним припущенням.

A2. Функції $m(x, u)$ та $a(x)$ є вимірними, та для деяких сталих $b_1, b_2, b_3 > 0$ мають місце нерівності

$$b_1 \leq m(x, u) \leq b_2, \quad |a(x)| \leq b_3, \quad x, u \in \mathbb{R}^n.$$

A3. Існують сталі $\gamma \in (0, 1]$ та $b_4 > 0$ такі, що

$$|m(x, u) - m(y, u)| + \|a(x) - a(y)\| \leq b_4 (\|x - y\|^\gamma \wedge 1), \quad u, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

A4. У випадку $\alpha \in (0, 1]$ припустимо, що $a(x) = 0$ та ядро $\mu(x, du)$ є симетричним за u для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Припустимо, що виконано одне з наступних припущень. Тоді функція $p_t(x, y)$, яку введено в (5)–(8), є коректно визначеною (а саме, існують інтеграли Φ^{*k} , $p^0 \star \Phi^{*k}$, та ряд $\sum_{k \geq 0} \Phi^{*k}$ збігається абсолютно), та неперервною на $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Пояснимо зв'язок між функцією $p_t(x, y)$, процесом Маркова, ймовірнісною щільністю якого є $p_t(x, y)$, та оператором L .

Теорема 2. Припустимо, що виконано умови теореми 1. Тоді сімейство операторів $(T_t)_{t \geq 0}$, що визначене в (10), є сильно неперервною консервативною напівгрупою на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, що відповідає процесу Маркова X . При цьому множина функцій класу $C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$ належить області визначення $D(A)$ генератора A цієї напівгрупи та $(A, D(A))$ є продовженням $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$, тобто

$$Af(x) = Lf(x), \quad f \in C_\infty^2(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 3. (i) Оператор $(A, D(A))$ є замиканням $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$.

(ii) Функція $p_t(\cdot, y)$ належить області визначення $D(A)$ оператора A , та є фундаментальним розв'язком задачі Коші для оператора $\partial_t - A$.

Доведення теореми використовує наступну властивість похідних $p_{t,\epsilon}(x, y)$:

(с) функція $\partial_t p_{t,\epsilon}(x, y)$, $\epsilon > 0$ апроксимує $\partial_t p_t(x, y)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, рівномірно на компактних підмножинах $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Ця властивість разом з (b) дозволяє контролювати L на функціях виду $T_{t,\epsilon}f$, $f \in D(A)$, та показати, що A є замиканням L в C_∞ .

Перше твердження теореми 3 дає змогу довести єдиність розв'язку мартингальної задачі для оператора $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$, тобто існування єдиної ймовірнісної міри \mathbb{P}^x , $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$, такої, що процес

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds, \quad f \in C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$$

є мартингалом.

Теорема 4. *Процес Маркова X , побудований в теоремі 3, є єдиним розв'язком мартингальної задачі для $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$.*

Метод параметрикса також дає можливість побудувати верхню та нижню оцінки на ймовірнісну щільність $p_t(x, y)$.

Позначимо через f_{up} та f_{low} функції виду

$$f_{up}(x) := b_1 e^{-b_2 \|x\|}, \quad f_{low}(x) := b_3 (1 - b_4 \|x\|)_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (17)$$

де $b_i > 0$, $1 \leq i \leq 4$, є сталими.

Теорема 5. *Для довільного $t_0 > 0$ існують сталі $b_i > 0$, $1 \leq i \leq 4$, та сімейство субймовірнісних мір $\{Q_t, t \geq 0\}$, таке, що*

$$\rho_t^n f_{low}(\rho_t(y - x)) \leq p_t(x, y) \leq \rho_t^n (f_{up}(\rho_t) * Q_t)(y - x), \quad t \in (0, t_0], \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (18)$$

де f_{up} , f_{low} є функціями типу (17) зі сталими b_i відповідно, а операція $*$ означає згортку за просторовими змінними.

Цитована література

1. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, I: Fourier analysis and Semigroups. – London: Imperial College Press, 2001. – 493 p.
2. *Bass R. F.* Uniqueness in law for pure jump Markov processes // *Probab. Th. Rel. Fields.* – 1988. – **79**, No 2. – P. 271–287.
3. *Hoh W.* The martingale problem for a class of pseudo-differential operators // *Math. Ann.* – 1994. – **300**, No 1. – P. 121–147.
4. *Hoh W.* Pseudo-differential operators with negative definite symbols and the martingale problem // *Stoch. Stoch. Rep.* – 1995. – **55**, No 3–4. – P. 225–252.
5. *Komatsu T.* On the martingale problem for generators of stable processes with perturbations // *Osaka J. Math.* – 1984. – **21**, No 1. – P. 113–132.
6. *Tsuchiya M.* On a small drift of Cauchy process // *J. Math. Kyoto Univ.* – 1970. – No 10. – P. 475–492.
7. *Tsuchiya M.* On some perturbations of stable processes // *Proc. “Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory”*. Eds. G. Maruyama, Yu. V. Prokhorov Yu. – Berlin: Springer, 1972. – P. 490–497.
8. *Bass R. F.* Stochastic differential equations with jumps // *Probability Surveys.* – 2004. – No 1. – P. 1–19.
9. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, III: Markov Processes and Applications. – London: Imperial College Press, 2005. – 474 p.
10. *Levi E. E.* Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali // *Rend. del. Circ. Mat. Palermo.* – 1907. – **24**. – P. 275–317.

11. *Feller W.* Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz – und Eindeutigkeitsätze) // *Math. Ann.* – 1936. – **113**. – P. 113–160.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – New York: Prentice-Hall, 1964. – 427 p.
13. *Ethier S. N., Kurtz, T. G.* Markov Processes: Characterization and Convergence. – New York: Wiley, 1986. – 470 p.
14. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, II: Generators and their potential theory. – London: Imperial College Press, 2002. – 453 p.

References

1. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, I: Fourier analysis and Semigroups, Imperial College Press, 2001.
2. *Bass R. F.* *Probab. Th. Rel. Fields.*, 1988, **79**, No 2: 271–287.
3. *Hoh W.* *Math. Ann.*, 1994, **300**, No 1: 121–147.
4. *Hoh, W.* *Stoch. Stoch. Rep.*, 1995, **55**, No 3–4: 225–252.
5. *Komatsu, T.* *Osaka J. Math.*, 1984, **21**, No 1: 113–132.
6. *Tsuchiya M. J.* *Math. Kyoto Univ.*, 1970, No 10: 475–492.
7. *Tsuchiya M.* *Proc. “Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory”*. Eds. G. Maruyama, Yu. V. Prokhorov Yu., Berlin: Springer, 1972: 490–497.
8. *Bass R. F.* *Probability Surveys.*, 2004, No 1: 1–19.
9. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, III: Markov Processes and Applications, London: Imperial College Press, 2005.
10. *Levi E. E.* *Rend. del. Circ. Mat. Palermo.*, 1907, **24**: 275–317.
11. *Feller W.* *Math. Ann.*, 1936, **113**: 113–160.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type, New-York: Prentice-Hall, 1964.
13. *Ethier S. N., Kurtz, T. G.* Markov Processes: Characterization and Convergence, New York: Wiley, 1986.
14. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, II: Generators and their potential theory, London: Imperial College Press, 2002.

Надійшло до редакції 04.12.2015

В. П. Кнопова¹, А. М. Кулик²

¹Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

²Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Построение процесса типа Леви при помощи метода параметрикса

Для широкого класса интегро-дифференциальных операторов доказано, что $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ -замыкание каждого из таких операторов является генератором полугруппы, которая соответствует феллеровскому процессу Маркова. Для плотности переходной вероятности найдено представление в виде ряда, а также найдены верхние и нижние оценки. Метод доказательства существенным образом базируется на обобщении метода параметрикса для задачи Коши с псевдодифференциальным оператором.

Ключевые слова: плотность переходной вероятности, процессы типа Леви, псевдодифференциальный оператор, метод параметрикса Леви.

V. P. Knopova¹, A. M. Kulik²

¹V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev

²Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Construction of a Lévy-type process by means of the parametrix method

For a wide class of integro-differential operators, it is proved that the $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ -closure of each of such operators is the generator of a semigroup corresponding to a Feller Markov process. The transition probability density of the process is expressed in the form of a convergent series, and the estimates from above and below are provided. The proof is based essentially on a generalization of the parametrix method for the Cauchy problem for pseudodifferential operators.

Keywords: transition probability density, Lévy-type processes, pseudodifferential operator, generator, Levi's parametrix method.