http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.019
УДК 517.984

А. Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
E-mail: asyrovatsky@gmail.com

О поведении дискретного спектра при одномерном возмущении

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Исследован случай наложения дискретной части спектра линейного оператора на абсолютно непрерывную часть при одномерном возмущении.

Ключевые слова: возмущение оператора, дискретный спектр, абсолютно непрерывный спектр.

В работе изучается спектр линейного самосопряженного оператора, который является одномерным возмущением самосопряженного оператора, причем спектр последнего представляет собой объединение дискретного простого спектра и абсолютно непрерывной части, при этом предполагается, что непрерывная часть спектра содержит конечное число лакун. Исследуется задача об одномерном возмущении такого оператора, причем нас интересует случай попадания дискретного спектра как в лакуну, так и на непрерывную часть спектра.

1. Пусть A — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим одномерное возмущение оператора A,

$$Bh = Ah + c\langle h, \varphi\rangle\varphi, \tag{1}$$

где h и φ из H, а $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\|\varphi\| = 1$.

Резольвента $R_\lambda(B)$ оператора B выражается через резольвенту $R_\lambda(A)$ оператора A формулой [1]

$$R_\lambda(B)f = R_\lambda(A)f - \frac{\langle R_\lambda(A)f, \varphi\rangle}{\frac{1}{c} + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi\rangle} R_\lambda(A)\varphi, \tag{2}$$

где f из H.

Особенностями резольвенты $R_\lambda(B)$ могут быть точки спектра оператора A и нули функции $m(\lambda)$, где

$$m(\lambda) = \frac{1}{c} + \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi\rangle. \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. *Пусть A — линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор, действующий в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H,*

© А. Н. Сыровацкий, 2016

спектр которого прост и состоит из счетного числа изолированных точек, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, занумерованных в порядке возрастания, $Ah_k = \alpha_k h_k$, $\alpha_k \neq \alpha_s$, $k \neq s$, $h_k \perp h_s$, $\langle h_k, h_s\rangle = \delta_{ks}$, $\forall k$. Пусть оператор B имеет вид (1), при этом $\xi_k = \langle \varphi, h_k\rangle \neq 0$, $\forall k$. Тогда спектр оператора B состоит из счетного числа изолированных точек $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые перемежаются с числами $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е., на каждом интервале (α_k, α_{k+1}) существует единственное собственное значение оператора B, причем если $c > 0$, то $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$, а при $c < 0$, соответственно, $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots$.

2. Пусть A — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим оператор B — одномерное возмущение оператора A вида (1). Предположим, что оператор A разлагается в прямую сумму операторов $A = A_c \bigoplus A_d$, где A_c имеет абсолютно непрерывный спектр $\sigma(A_c)$, а A_d — ограниченный оператор с простым дискретным спектром $\sigma(A_d) = \{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, причем $\sigma(A_c) \bigcap \sigma(A_d) = \varnothing$. Как известно [2, 3], при одномерном возмущении спектр $\sigma(A_c)$ оператора A не меняется. Следующие теоремы дают условия наложения спектра возмущенного оператора B на непрерывную часть спектра исходного.

Обозначим

$$\alpha_{\min} = \min_i \alpha_i, \qquad \alpha_{\max} = \max_i \alpha_i. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma(A_c) = (-\infty, b]$ — спектр оператора A_c, причем $b < \alpha_{\min} < \ldots < \alpha_{\max}$, где $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ имеют вид (4). Тогда, чтобы существовало собственное значение β оператора B такое, что $\beta < b$ (наложение на $\sigma(A_c)$), достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$c < b - \alpha_{\max}.$$

Теорема 3. *Пусть $\sigma(A_c) = [a, \infty)$ — спектр оператора A_c, причем $\alpha_{\min} < \ldots < \alpha_{\max} < a$, где $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ имеют вид (4). Тогда, чтобы существовало собственное значение β оператора B такое, что $\beta > a$, достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$c > a - \alpha_{\min}.$$

Теорема 4. *Пусть $\sigma(A_c) = [a, b]$ — спектр оператора A_c, причем, $a < b < \alpha_{\min} < \ldots < \alpha_{\max}$ (или $\alpha_{\min} < \ldots < \alpha_{\max} < a < b$), где $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ имеют вид (4). Тогда, чтобы существовало собственное β значение оператора B такое, что $a < \beta < b$, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$a - \alpha_{\min} < c < b - \alpha_{\max}.$$

Теорема 5. *Пусть $\sigma(A_c) = [a, b]$ — спектр оператора A_c, причем $\alpha_{\min} < \ldots < \alpha_k < a < b < \alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_{\max}$, где $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ имеют вид (4). Тогда, чтобы существовало собственное β значение оператора B такое, что $a < \beta < b$, достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\sum_{i \leqslant k} |\xi_i|^2 > \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\alpha_{k+1} - a}\right) \frac{(\alpha_{k+1} - a)(a - \alpha_{\min})}{\alpha_{k+1} - \alpha_{\min}},$$

$$\sum_{i > k} |\xi_i|^2 > \left(\frac{1}{b - \alpha_k} - \frac{1}{c}\right) \frac{(\alpha_{\max} - b)(b - \alpha_k)}{\alpha_{\max} - \alpha_k}.$$

Доказательства теорем 2–5 основано на изучении вещественных нулей функции $m(\lambda)$,

$$m(x) = \frac{1}{c} + \sum \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - x},$$

где $\xi_i = \langle \varphi, h_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant \infty)$ — координаты вектора φ в базисе, состоящем из ортонормированных собственных векторов $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ оператора A_d.

Таким образом, в работе получены условия наложения дискретной части спектра на абсолютно непрерывную часть при одномерном возмущении.

Цитированная литература

1. *Сыровацкий А. Н.* Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Математика, прикладна математика і механіка. – 2010. – № 922. – С. 20–31.
2. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
3. *Rozenblum M.* Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence // Pacific. J. Math. – 1957. – **7**, No 1. – P. 997–1010.
4. *Nizhnik L. P.* On rank one singular perturbations of self-adjoint operators // Methods Funct. Anal. Topol. – 2001. – **7**, No 3. – P. 54–66.

References

1. *Syrvatsky A. N.* Visnik Kharkiv. nats. un-tu im. V. N. Karazina. Mathematics, Applied Mathematics and mechanics, 2010, No 922: 20–31 (in Russian).
2. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators, Moscow: Mir, 1972 (in Russian).
3. *Rozenblum M.* Pacific J. Math., 1957, **7**, No 1: 997–1010.
4. *Nizhnik L. P.* Methods Funct. Anal. Topol., 2001, **7**, No 3: 54–66.

Поступило в редакцию 14.09.2015

О. М. Сировацький

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна
E-mail: asyrovatsky@gmail.com

Про поведінку дискретного спектра при одновимірному збуренні

Досліджено випадок накладення дискретної частини спектра лінійного оператора на абсолютно безперервну частину при одновимірному збуренні.

Ключові слова: збурення оператора, дискретний спектр, абсолютно неперервний спектр.

A. N. Syrovatsky

V. N. Karazin Kharkiv National University
E-mail: asyrovatsky@gmail.com

The behavior of a discrete spectrum at a one-dimensional perturbation

The case of the overlay of a discrete part of the spectrum of a linear operator on an absolutely continuous part at a one-dimensional perturbation is studied.

Keywords: perturbation of operator, discrete spectrum, absolutely continuous spectrum.