

А. М. Гомилко, член-корреспондент НАН Украины **А. Н. Трофимчук**

Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства
НАН Украины, Киев

E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом

Доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле в классической постановке для однородного бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, задача Дирихле, полуполоса.

Пусть вещественная функция $l(y) \in C^2[-1, 1]$, с условиями $l(\pm 1) = 0$ и $l'(\pm 1) = 0$. В полуполосе

$$\Pi = \{(x, y): x > l(y), |y| < 1\}$$

с криволинейным торцом $\Gamma = \{x = l(y), |y| < 1\}$ рассматривается в классической постановке [1, с. 357] граничная задача Дирихле для однородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad u \in C^4(\Pi) \cap C^1(\bar{\Pi}),$$

$$u(x, \pm 1) = u'_y(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{\Gamma} \equiv u(l(y), y) = f(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} \equiv \frac{u'_x(l(y), y) - l'(y)u'_y(l(y), y)}{(1 + l'^2(y))^{1/2}} = g(y), \quad |y| \leq 1, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{|y| \leq 1} \{|u(x, y)| + |u'_x(x, y)|\} = 0.$$

На функции f, g накладываются естественные условия

$$f \in C^1 = C^1[-1, 1], \quad g \in C = C[-1, 1], \quad f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0. \quad (2)$$

Таким образом, искомое решение u , в отличие от обобщенной постановки задачи Дирихле (см., например, [2]), предполагается четырежды непрерывно дифференцируемым в Π и непрерывно дифференцируемым в замыкании $\bar{\Pi}$ полуполосы. Введем норму $C^1(\bar{\Pi})$:

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Pi})} = \sup_{(x,y) \in \bar{\Pi}} \{|u(x, y)| + |\nabla u(x, y)|\} < \infty.$$

В работе доказывается однозначная разрешимость граничной задачи (1). В частности, для функций u , удовлетворяющих (1), установлена справедливость принципа максимума Миранды–Агмона [3, 4]

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Pi})} \leq c\{\|f\|_{C^1[-1,1]} + \|g\|_{C[-1,1]}\}. \quad (3)$$

Принцип максимума Миранды–Агмона и его обобщения для решений бигармонического уравнения в ограниченных областях с кусочно-гладкой границей рассмотрены в [5].

Используемый здесь метод сведения проблемы (1) к системе интегральных уравнений на отрезке (или на кривой Γ) был использован в статье [6] и возник на основе анализа метода Шермана–Лауричеллы [7, гл. 4], используемого при исследовании плоских задач теории упругости в ограниченных областях. С другой стороны, для избавления от необходимости удовлетворения граничным условиям из (1) на боковых сторонах и на бесконечности, следуя [8], мы используем функцию Грина для бигармонического уравнения в полосе $|y| < 1$ с однородными граничными условиями при $y = \pm 1$.

Введем в рассмотрение пучок обыкновенных дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}(\lambda)z(y) = z^{(4)}(y) - 2\lambda^2 z^{(2)}(y) + \lambda^4 z(y), \quad |y| \leq 1, \quad z(\pm 1) = z'(\pm 1) = 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть функция

$$\Delta(\lambda) = \sinh^2 \lambda \cosh^2 \lambda - \lambda^2.$$

Для функции Грина $G(y, t; \lambda)$, $-1 \leq y, t \leq 1$ обыкновенного дифференциального оператора $\mathcal{L}(\lambda)$, согласно [9, § 3], имеем выражение

$$\begin{aligned} 4\lambda^3 G(y, t; \lambda) &= \lambda|y - t| \cosh \lambda(y - t) - \sinh \lambda|y - t| + \\ &+ [\cosh \lambda y ((\sinh^2 \lambda - \lambda^2) \cosh \lambda t - \lambda t \sinh^2 \lambda \sinh \lambda t) - \\ &- \lambda y \sinh \lambda y (\sinh^2 \lambda \cosh \lambda t + \lambda t \sinh \lambda t)] / \Delta_1(\lambda) + \\ &+ [\sinh \lambda y (-(\cosh^2 \lambda + \lambda^2) \sinh \lambda t + \lambda t \cosh^2 \lambda \cosh \lambda t) + \\ &+ \lambda y \cosh \lambda y (\cosh^2 \lambda \sinh \lambda t - \lambda t \cosh \lambda t)] / \Delta_2(\lambda). \end{aligned} \quad (4)$$

При фиксированных y, t функция $G(y, t; \lambda)$ является четной мероморфной по $\lambda \in \mathbb{C}$ функцией с простыми полюсами $\pm \lambda_k$, где λ_k — корни $\Delta(\lambda)$ с $\text{Im } \lambda_k > 0$. Другие элементарные аналитические свойства и оценки функции $G(y, t; \lambda)$ и ее производных приведены в [6]. Отметим, что функция

$$F(x - x', y; y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(y, y'; s) e^{i(x-x')} ds, \quad (x, y) \neq (x', y'),$$

является функцией Грина для бигармонического уравнения в полосе $|y| < 1$ с однородными граничными условиями Дирихле.

По функции Грина G определим при $y \neq t$ функции

$$\begin{aligned} H_1(y, t; \lambda) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \right) G(y, t; \lambda), \\ H_2(y, t; \lambda) &= -2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \right) G(y, t; \lambda), \\ H_3(y, t; \lambda) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\lambda^2 \right) G(y, t; \lambda). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим равенства $H_j(y, t; 0) = y(3 - y^2)/2 - \text{sign}(y - t)$, $j = 1, 3$.

Пусть функции

$$\begin{aligned}
 Q_1(x, y; t) &= \frac{\text{sign}(y-t)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_1(y, t; s) \frac{\sin s(x-l(t))}{s} ds + \\
 &+ \frac{l'(t)}{\pi} \int_0^\infty H_2(y, t; s) \cos s(x-l(t)) ds, \\
 Q_2(x, y; t) &= l'(t) \frac{\text{sign}(y-t)}{2} + \frac{l'(t)}{\pi} \int_0^\infty H_3(y, t; s) \frac{\sin s(x-l(t))}{s} ds + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_2(y, t; s) \cos s(x-l(t)) ds,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $(x, y) \in \Pi$. Отметим, что для любого $t \in (-1, 1)$ функции $Q_k(x, y; t)$ являются бигармоническими в Π , причем

$$Q_k(x, \pm 1; t) = \frac{\partial Q_k}{\partial y}(x, \pm 1; t) = 0, \quad x > 0, \quad k = 1, 2. \tag{7}$$

Решение граничной задачи (1) ищем в виде

$$u = \Phi[q](x, y) := \int_{-1}^1 Q_1(x, y; t) q_1(t) dt + \int_{-1}^1 Q_2(x, y; t) q_2(t) dt, \quad q = \{q_1, q_2\} \in \mathcal{B}, \tag{8}$$

где банахово пространство

$$\mathcal{B} = \left\{ (q_1, q_2) \in C_0 \oplus C_0 : \int_{-1}^1 (q_1(t) + l'(t)q_2(t)) dt = 0 \right\},$$

$$C_0 = C_0[-1, 1] = \{p \in C : p(\pm 1) = 0\}.$$

Можно доказать, что для любой вектор-функции $q = \{q_1, q_2\} \in \mathcal{B}$ функция $\Phi[q]$ бесконечно дифференцируема при $x > l(y)$, $|y| \leq 1$, является бигармонической в Π , удовлетворяет однородным граничным условиям из (1) на боковых сторонах полуполосы и на бесконечности, причем справедлива оценка

$$\sup_{(x, y) \in \Pi} \{|\Phi[q](x, y)| + |\nabla \Phi[q](x, y)|\} \leq c \|q\|_{\mathcal{B}}, \tag{9}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $q \in \mathcal{B}$.

Таким образом, для определения неизвестной вектор-функции $q \in \mathcal{B}$ из (8) требуется выполнить для $\Phi[q]$ граничные условия из (1) на торце полуполосы. При этом граничные условия на торце удобно записать в виде

$$u'_y(l(y), y) = h_1(y), \quad u'_x(l(y), y) = h_2(y),$$

где функции

$$\begin{aligned} h_1(y) &= [f'(y) - l'(y)(1 + l'^2(y))^{1/2}g(y)](1 + l'^2(y))^{-1}, \\ h_2(y) &= [l'(s)f'(y) + (1 + l'^2(y))^{1/2}g(y)](1 + l'^2(y))^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

На этом пути, используя известные свойства потенциала двойного слоя (см. [10, с. 452]), можно показать, что функция $u = \Phi[q]$, $q \in \mathcal{B}$, является решением граничной задачи (1) в том и только том случае, когда вектор-функция $q = \{q_1, q_2\}$ является решением системы линейных интегральных уравнений

$$q + Aq = h, \quad (11)$$

где $A = \{A_{nk}\}_{n,k=1}^2$, причем

$$\begin{aligned} (A_{11}q_1)(s) &= \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_1}{\partial y}(l(s), s; t)q_1(t) dt, & (A_{12}q_2)(s) &= \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_2}{\partial y}(l(s), s; t)q_2(t) dt, \\ (A_{21}q_1)(s) &= \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_1}{\partial x}(l(s), s; t)q_1(t) dt, & (A_{22}q_2)(s) &= \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_2}{\partial x}(l(s), s; t)q_2(t) dt, \end{aligned}$$

а правая часть $h = \{h_1, h_2\} \in \mathcal{B}$ определяется согласно выражениям (10). При этом линейный оператор A непрерывно действует в пространстве \mathcal{B} .

Можно доказать, что оператор A имеет вид $A = T + K$, где линейный интегральный оператор K непрерывно действует из пространства $C \oplus C$ в пространство $C^1 \oplus C^1$ и, в частности, является вполне непрерывным оператором в $C \oplus C$, а оператор $T = \{T_{nk}\}_{n,k=1}^2$, причем $T_{11} = T_{22} = 0$ и

$$\begin{aligned} (T_{12}p)(s) &= \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)(1-t)(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2} dt - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+s)(1+t)(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2} dt, \\ (T_{21}p)(s) &= \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^2(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2} dt - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+s)^2(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Операторы T_{12} , T_{21} непрерывно действуют в пространстве C , и, используя результаты Радона [11, п. 90] об операторах в пространстве непрерывных функций, показываем, что оператор A является фредгольмовым оператором с нулевым индексом в пространстве \mathcal{B} . Здесь важное значение имеет априорная информация о дифференциальных свойствах решений этого уравнения при $s \rightarrow \pm 1$. Для получения такой информации используется техника интегрального преобразования Меллина (см. аналогичные рассуждения в [6, п. 4]). Таким образом, уравнение (11) является однозначно разрешимым в \mathcal{B} тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение не имеет нетривиальных решений в пространстве \mathcal{B} . На этом пути устанавливается, что уравнение (11) является однозначно разрешимым в банаховом пространстве \mathcal{B} и для его решений верна оценка

$$\|q\|_{\mathcal{B}} \leq c \|h\|_{\mathcal{B}}, \quad (12)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от вектора $h \in \mathcal{B}$.

Устанавливая однозначность решения граничной задачи (1) и используя (9), (12), получаем следующий основной результат работы.

Теорема. Для любых функций f, g , удовлетворяющих условиям (2), существует и является единственным решением $u \in C^4(\Pi) \cap C^1(\bar{\Pi})$ граничной задачи (1). Это решение имеет вид $u = \Phi[q]$ с вектор-функцией $q \in \mathcal{B}$, однозначно определяемой из уравнения (11) с правой частью $h = \{h_1, h_2\}$, заданной (10). Существует такая постоянная $c > 0$, что для решений граничной задачи (1) выполняется оценка (3).

Используя теорему и соответствующие рассуждения из работы [6], можно показать, что для решений граничной задачи (1) выполняется оценка

$$|u(x, y)| + |\nabla u(x, y)| \leq c\{\|f\|_{C^1} + \|g\|_C\} \exp(-\delta x),$$

$$x \geq 0, \quad |y| \leq 1, \quad \delta = \min_{k=1,2,\dots} \operatorname{Im} \lambda_k, \quad (13)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от граничных данных f, g , удовлетворяющих условиям (2). Оценка (13) уточняет принцип максимума (3), с учетом наличия в области Π бесконечно удаленной точки.

Отметим, что постановка условия на бесконечности из (1) допускает и другие, менее ограничительные, варианты (см. [12]). В идейном плане основной момент проведенных рассуждений при сведении граничной задачи (1) к системе интегральных уравнений состоит в построении функций $Q_j(x, y; t)$, $j = 1, 2$, а именно в перенесении конструкции Шермана–Лауричеллы на случай полуполосы. (Относительно других способов сведения граничных задач для бигармонического уравнения в областях с конечной границей к граничным интегральным уравнениям см. [13, § 2].)

Проведенные рассмотрения могут быть обобщены на случай функции $l(y)$ с более общими условиями, чем $l \in C^2$, $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$. Для этого следует привлечь результаты Радона и их обобщения, связанные с теорией логарифмического потенциала [14, 15, гл. 4].

Цитированная литература

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
2. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, вып. 3. – С. 3–76.
3. Agmon S. Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1957. – **66**, No 2. – P. 77–88.
4. Miranda C. Theorema del massimo modulo e theorema di esistenza edunicata per il problema Dirichlet relative alle equazioni ellitiche in due variabili // Ann. Math. Pure Appl. – 1958. – **46**. – P. 265–311.
5. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. – 1978. – **81**. – S. 25–82.
6. Гомилко А. М. Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**. – С. 228–237.
7. Партон В. З., Перлин В. И. Интегральные уравнения теории упругости. – Москва: Наука, 1977. – 312 с.
8. Gregory R. D. The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite “strip”, existence of solution, and completeness of the Papkovitch–Fadle eigenfunctions // J. Elasticity. – 1980. – **10**, No 3. – P. 295–327.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
11. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 592 с.

12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 5. – С. 1154–1165.
13. *Мазья В. Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27. – Москва: ВИНТИ, 1988. – С. 131–228.
14. *Радон И.* О краевых задачах для логарифмического потенциала // Успехи мат. наук. – 1946. – **1**, вып. 3–4. – С. 96–124.
15. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи. – Москва: Наука, 1975. – 295 с.

References

1. *Fridman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type, Moscow: Mir, 1968 (in Russian).
2. *Kondrat'ev V. A., Oleinik O. A.* Uspehi Mat. Nauk, 1983, **38**, No 3: 3–76 (in Russian).
3. *Agmon S.* Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **66**, No 2: 77–88.
4. *Miranda C.* Ann. Math. Pure Appl., 1958, **46**: 265–311.
5. *Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A.* Math. Nachr., 1978, **81**: 25–82 (in Russian).
6. *Gomilko A. M.* Differential Equations, 1998, **34**, No 2: 231–241.
7. *Parton V. Z., Perlin P. I.* Integral equations in elasticity theory, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
8. *Gregory R. D. J.* Elasticity, 1980, **10**, No 3: 295–327.
9. *Naimark M. A.* Linear differential operators, Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
10. *Vladimirov V. S.* Equations of Mathematical Physics, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
11. *Riesz F., Szökefalvi-Nagy B.* Functional Analysis, Moscow: Mir, 1979 (in Russian).
12. *Oleinik O. A., Iosif'yan G. A.* Sibirskij Mat. Zh., 1978, **19**, No 5: 1154–1165 (in Russian).
13. *Maz'ya V. G.* Boundary integral equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., Vol. 27, Moscow: VINITI, 1988: 131–228 (in Russian).
14. *Radon I.* Uspehi Mat. Nauk, 1946, **1**, No 3–4: 96–124 (in Russian).
15. *Danilyuk I. I.* Nonregular boundary value problems in the plane, Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).

Поступило в редакцию 19.10.2015

О. М. Гомілко, член-кореспондент НАН України **О. М. Трофімчук**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ
E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Класична задача Діріхле для бігармонічного рівняння в півсмугі з криволінійним торцем

Доведена однозначна розв'язність задачі Діріхле в класичній постановці для однорідного бігармонічного рівняння у півсмугі з криволінійним торцем.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, задача Діріхле, півсмуга.

A. M. Gomilko, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. N. Trofimchuk**

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alex@gomilko.com, itelua@kv.ukrtel.net

Classical Dirichlet problem for the biharmonic equation in a semistrip with curvilinear end

We prove the unique solvability of the Dirichlet problem in a classical formulation for the homogeneous biharmonic equation in a semistrip with curvilinear end.

Keywords: biharmonic equation, Dirichlet problem, semistrip.