ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.038
УДК 519.8

Т.Т. Лебєдєва, https://orcid.org//0000-0002-0041-2174

Н.В. Семенова, https://orcid.org// 0000-0001-5808-1155

Т.І. Сергієнко, https://orcid.org//0000-0003-0396-3315

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна
E-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova@meta.ua, taniaser62@gmail.com

Регуляризація частково цілочислової задачі векторної оптимізації з квадратичними функціями критеріїв

Представлено академіком НАН України І.В. Сергієнком

Представлено нові результати, пов'язані з регуляризацією частково цілочислових задач оптимізації за Парето за умов можливих збурень вхідних даних векторного критерію, який складається з квадратичних функцій. Розроблена процедура регуляризації ґрунтується на використанні властивості стійкості відносно збурень коефіцієнтів критеріїв векторної задачі оптимізації за Слейтером.

Ключові слова: *задача частково цілочислової оптимізації за Парето, векторний критерій, квадратичні функції, збурення вхідних даних, стійкість, регуляризація, множина Слейтера.*

Вступ. Багато проблем прийняття багатоцільових рішень в управлінні, плануванні та проєктуванні можуть бути сформульовані як багатокритерійні (векторні) задачі дискретної оптимізації. Характерною особливістю таких задач, що виникають на практиці, є неточність вхідної інформації, яка зумовлена впливом різних факторів невизначеності та випадковості: неадекватністю математичних моделей реальним процесам, помилками округлення, похибками вимірювань тощо. За таких умов математична задача не може бути коректно поставлена та розв'язана без хоча б неявного використання результатів теорії стійкості та регуляризації можливо нестійкої задачі [1—3].

Мета роботи — розробка та обґрунтування процедури регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм частково цілочислової задачі оптимізації за Парето з квадратичними цільовими функціями і множиною допустимих розв'язків, яка є компактом. У

Ц и т у в а н н я: Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Регуляризація частково цілочислової задачі векторної оптимізації з квадратичними функціями критеріїв. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 5. С. 38—43. https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.038

межах цього підходу регуляризація полягає у перетворенні нестійкої за векторним критерієм вхідної задачі на завідомо стійку збурену спеціальним чином задачу.

Постановка задачі. Означення та основні твердження. Розглянемо векторну задачу частково цілочислової оптимізації такого вигляду:

$$\max\{F(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

де $X \neq \varnothing$, $X \subset R^{n_1} \times Z^{n_2} \subset R^n$, $n_1 + n_2 = n$, $1 \leqslant n_1 < n$, R^n — n-вимірний дійсний простір, Z^{n_2} — множина всіх цілочислових векторів з R^{n_2}, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_\ell(x))$ — векторний критерій, $f_i : R^{n_1} \times Z^{n_2} \to R^1$ — квадратичні критеріальні функції вигляду $f_i(x) = \langle x, D_i x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $D_i = [d^i_{jk}] \in R^{n\times n}$, $c_i = (c_{i1}, ..., c_{in}) \in R^n$, $i \in N_\ell = \{1, ..., \ell\}$, $j, k \in N_n = \{1, ..., n\}$. Задачу (1) позначатимемо $Q_P(F, X)$, якщо її множиною оптимальних розв'язків будемо вважати множину Парето $P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing$, де

$$\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geqslant F(x),\ F(y) \neq F(x)\}, \tag{2}$$

Якщо оптимальними будемо вважати всі допустимі розв'язки задачі, які належать множині Слейтера $S\ell(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\}$, де

$$\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}, \tag{3}$$

тоді задачу (1) позначатимемо $Q_{Sl}(F, X)$.

Для задачі (1) як вхідні дані, що можуть зазнавати збурень, будемо розглядати коефіцієнти векторного критерію F, який складається з квадратичних функцій. Набір таких вхідних даних позначимо $u = (D, C) \in U = R^{n\times n\times\ell} \times R^{\ell\times n}$, де $D = (D_1, ..., D_\ell) \in R^{n\times n\times\ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell\times n}$, U — простір вхідних даних задачі, які необхідні для подання векторного критерію. З метою уточнення, який саме набір вхідних даних $u \in U$ відповідає задачі, що розглядається, будемо користуватися також позначеннями $F_u(x) = (f^1_u(x), ..., f^\ell_u(x))$.

Далі для будь-якого натурального числа q дійсний векторний простір R^q розглядатимемо як нормований. Норму в R^q задамо формулою $\|z\| = \sum_{i\in N_q} |z_i|$, де $z = (z_1, ..., z_q) \in R^q$. Під нормою деякої матриці $B = [b_{ij}] \in R^{m\times k}$ будемо розуміти норму вектора $(b_{11}, b_{12,...,} b_{mk})$. Враховуючи, що у скінченно-вимірному просторі R^q будь-які дві норми еквівалентні [4], викладені далі результати справедливі й для інших норм, введених у такому просторі.

Для набору вхідних даних $u \in U$ і будь-якого числа $\delta > 0$ визначимо множину збурених вхідних даних як такий δ-окіл:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \|u(\delta) - u\| < \delta\}.$$

Задача зі збуреними вхідними даними для векторного критерію матиме вигляд:

$$\max\{F_{u(\delta)}(x) \mid x \in X\},$$

де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = \{f^1_{u(\delta)}(x), f^2_{u(\delta)}(x), .., f^\ell_{u(\delta)}(x)\}$.

Означення 1. Задачу $Q_P(F_u, X)$ $(Q_{Sl}(F_u, X))$, де $u \in U$, назвемо **стійкою за векторним критерієм**, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконується умова $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$ (відповідно $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$.

Тут і далі ε-окіл будь-якої множини $B \subset R^n$ будемо визначати за формулою

$$O_\varepsilon(B) = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \inf_{y \in B} \|x - y\| < \varepsilon \right\}.$$

Відмітимо, що стійкість за векторним критерієм задачі $Q_P(F_{\tilde{u}}, X)$ $(Q_{Sl}(F_{\tilde{u}}, X))$, де $\tilde{u} \in U$, означає, що точково-множинне відображення $P : U \to 2^X$, $u \to P(u) = P(F_u, X)$ (відповідно відображення $Sl : U \to 2^X$, $u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$) є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці $\tilde{u} \in U$.

У роботі [5] доведено таку достатню умову стійкості до збурень коефіцієнтів векторного критерію для задачі на відшукання розв'язків, оптимальних за Слейтером.

Теорема 1. *Якщо допустима множина X є компактом, то задача $Q_{Sl}(F_u, X)$, де $u \in U$, є стійкою за векторним критерієм.*

Достатні умови стійкості задачі $Q_P(F_u, X)$, де $u \in U$, на відшукання Парето-оптимальних розв'язків, сформульовано в наступному твердженні, доведеному в роботі [6].

Теорема 2. *Якщо допустима множина X є компактом і, крім того, виконується рівність*

$$S\ell(F_u, X) = \mathrm{cl}(P(F_u, X)), \tag{4}$$

де $\mathrm{cl}B$ *— замикання будь-якої множини $B \subset R^n$, то задача $Q_P(F_u, X)$, де $u \in U$, є стійкою за векторним критерієм.*

Враховуючи цю теорему і виходячи з означення 1, робимо висновок, що розв'язуючи векторну задачу $Q_P(F_u, X)$ за умов обмеженості і замкнeності допустимої множини X, а також виконання співвідношення (4), яке пов'язує множини Слейтера і Парето, отримаємо розв'язки, близькі до істинних, навіть у випадку, коли можливі достатньо малі збурення у вхідних даних для векторного критерію.

Проте згідно з означенням 1 для нестійкої до збурень вхідних даних векторного критерію частково цілочислової задачі $Q_P(F_u, X)$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ знайдеться набір збурених вхідних даних $u(\delta) \in O_\delta(u)$, для якого множина $P(F_{u(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_u, X)$ не є порожньою. Таким чином, за умови збурень вхідних даних, необхідних для подання векторного критерію, існує можливість отримання результатів розв'язання задачі $Q_P(F_u, X)$, які не є її шуканими Парето-оптимальними розв'язками і навіть не є достатньо близькими до множини Парето. Для уникнення таких помилкових результатів необхідна розробка та обґрунтування процедури регуляризації, застосування якої дозволить отримати шукані розв'язки з множини $P(F_u, X)$ або близькі до неї, здійснивши для цього, наприклад, як це буде запропоновано далі, перехід від безпосереднього розв'язання можливо нестійкої задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето до розв'язання напевно стійкої задачі $Q_{Sl}(F_{u^\tau}, X)$ оптимізації за Слейтером зі спеціальним чином збуреними (зміненими) вхідними даними u^τ, де τ — параметр збурення.

Відмітимо, що у випадку, коли критерій F_u складається з лінійних функцій $f^i(x) = \langle c_i, x\rangle$, $i \in N_\ell$, підхід до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F_u, X)$ запропоновано у статті [5].

Далі опишемо **процедуру регуляризації** можливо нестійкої за векторним критерієм частково цілочислової задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето з квадратичними цільовими функціями і множиною допустимих розв'язків X, яка є компактом.

Крок 1. Змінимо спеціальним чином векторний критерій $F_u(x)$. Змінений критерій буде мати вигляд $F_{u^\tau}(x) = \{f^1_{u^\tau}(x), f^2_{u^\tau}(x), .., f^\ell_{u^\tau}(x)\}$, де $u^\tau = (D^\tau, C^\tau) \in U$, $\tau < 0$, $f^i_{u^\tau}(x) = \langle x, D_i^\tau x\rangle + \langle c_i^\tau, x\rangle$, $D_i^\tau = D_i - \tau \sum_{k \in N_\ell} \mu_k D_k \in R^{n\times n}$, $c_i^\tau = c_i - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k c_k$ — вектори-рядки зміненої матриці $C^\tau \in R^{\ell\times n}$, $\mu_i > 0$, $i \in N_\ell$.

Крок 2. Перейдемо від можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето до стійкої зміненої задачі $Q_{Sl}(F_{u^\tau}, X)$ оптимізації за Слейтером. Обґрунтуванням такого переходу слугують наступні дві теореми, які встановлюють зв'язок між множинами оптимальних розв'язків цих двох задач, у тому числі за можливості збурень коефіцієнтів критеріальних функцій.

Теорема 3. *Для будь-якого значення $\tau < 0$ параметра збурень вхідних даних векторного критерію задачі $Q_{Sl}(F_{u^\tau}, X)$ справджується включення*

$$S\ell(F_{u^\tau}, X) \subset P(F_u, X). \tag{5}$$

Доведення. Якщо $X \setminus P(F_u, X) = \varnothing$, тоді справедливість включення (5) стає очевидною. Проте у протилежному випадку, коли не всі точки множини X є Парето-оптимальними розв'язками задачі $Q_P(F_u, X)$, для доведення включення (5) розглянемо будь-яку точку $z \in X \setminus P(F_u, X)$. Для неї з урахуванням формули (2) маємо $\pi(z, F_u, X) = \{y \in X \,|\, F_u(y) - F_u(z) \geqslant 0,\ F_u(y) \neq F_u(z)\} \neq \varnothing$. Покажемо, що $\forall \tau < 0$ справедливе включення $\pi(z, F_u, X) \subset \sigma(z, F_{u^\tau}, X)$, де згідно з формулою (3) $\sigma(z, F_{u^\tau}, X) = \{y \in X \,|\, F_{u^\tau}(y) - F_{u^\tau}(z) > 0\}$. Для цього, вибравши довільну точку $y \in \pi(z, F_u, X)$ і будь-яке $\tau < 0$, оцінимо різницю значень кожної i-ї критеріальної функції $f^i_{u^\tau}$ ($i \in N_\ell$) у точках y і z:

$$f^i_{u^\tau}(y) - f^i_{u^\tau}(z) = \langle y, D_i^\tau y\rangle + \langle c_i^\tau, y\rangle - \langle z, D_i^\tau z\rangle - \langle c_i^\tau, z\rangle = \langle y, (D_i - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k D_k) y\rangle +$$

$$+ \langle c_i - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k c_k, y\rangle - \langle z, (D_i - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k D_k) z\rangle - \langle c_i - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k c_k, z\rangle =$$

$$= f^i_u(y) - f^i_u(z) - \tau \sum_{k\in N_\ell} \mu_k (f^i_u(y) - f^i_u(z)) > 0.$$

Отримана додатна оцінка вказаної різниці означає, що $y \in \sigma(z, F_{u^\tau}, X) \neq \varnothing$. Отже, $z \in X \setminus Sl(F_{u^\tau}, X)$ і, більше того, $X \setminus P(F_u, X) \subset X \setminus Sl(F_{u^\tau}, X)$. Останнє включення еквівалентне в нашому випадку включенню (5). Доведення теореми завершено.

З врахуванням теорем 1 і 3 приходимо також до такого висновку.

Теорема 4. *Нехай допустима множина* X *задачі* $Q_P(F_u, X)$, *де* $u \in U$, *є компактом. Тоді* $\forall \tau < 0$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *таке, що* $\forall u^\tau(\delta) \in O_\delta(u^\tau)$ *має місце включення*

$$S\ell(F_{u^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon P(F_u, X).$$

Висновки. Запропоновано та обґрунтовано процедуру регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм частково цілочислової задачі $Q_P(F_u, X)$ оптимізації за Парето з квадратичними цільовими функціями і допустимою множиною X, яка є компактом. У межах розробленого підходу регуляризація полягає у перетворенні можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F_u, X)$ на стійку збурену спеціальним чином задачу $Q_{Sl}(F_{u^\tau}, X)$ оптимізації за Слайтером, розв'язки якої близькі до шуканих Парето-оптимальних розв'язків навіть у випадку, коли існують достатньо малі збурення у вхідних даних векторного критерію.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 264 с.
3. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization*. 2002. **51**, № 4. P. 645—676. https://doi.org/10.1080/0233193021000030760
4. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Вища школа. 1992. 495 с.
5. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість і регуляризація частково цілочислових задач векторної оптимізації за можливих збурень критеріїв. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 5. С. 16—22. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.016
6. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість за векторним критерієм задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 10. С. 15—21. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015

Надійшло до редакції 09.07.2024

REFERENCES

1. Sergienko, I. V., Kozeratskaya, L. N. & Lebedeva, T. T. (1995). Stability Analysis and Parametric Analysis of Discrete Optimization Problems. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian)
2. Sergienko, I. V. & Shilo, V. P. (2003). Discrete optimization. Problems: challenges, methods, solutions. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian)
3. Emelichev, V. A., Girlich, E., Nikulin, Yu. V. & Podkopaev, D. P. (2002). Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. Optimization, 51, No. 4, pp. 645-676. https://doi.org/10.1080/0233193021000030760
4. Lyashko, I. I., Yemelyanov, V. F. & Boyarchuk, O. K. (1992). Mathematical analysis. Part 1. Kyiv: Visha shcola (in Ukrainian)
5. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2022). Stability and regularization of partially integer problems of vector optimization with possible perturbations of criteria. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 16-22. (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.05.016
6. Lebedeva, T. T., Semenova, N. V. & Sergienko, T. I. (2020). Stability by the vector criterion of a mixed integer optimization problem with quadratic criterial functions. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 10, pp. 15-21. (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.10.015

Received 09.07.2024

T.T. Lebedeva, https://orcid.org//0000-0002-0041-2174
N.V. Semenova, https://orcid.org//0000-0001-5808-1155
T.I. Sergienko, https://orcid.org//0000-0003-0396-3315

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: lebedevatt@gmail.com, nvsemenova@meta.ua, taniaser62@gmail.com

REGULARIZATION OF PARTIALLY INTEGER
VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS WITH QUADRATIC CRITERIA

The article is devoted to the question of regularization of partially integer Pareto-optimization problems with vector criterion input perturbations. New results are obtained for the case when the vector problem is partially integer with quadratic functions as criteria. The developed regularization procedure is based on the use of the Slater stability property with respect to perturbations of criterion coefficients of the vector optimization problem. The obtained results - the conditions of stability to possible perturbations of vector criterion input data and the developed procedure of regularization of vector optimization problems — are related to the solution of problems of correct modeling of economic, ecological, technological, social processes in conditions of effective accounting of incompleteness and uncertainty of input information.

Keywords: *partially integer problem, Pareto optimization, vector criterion, quadratic functions, perturbations of input data, stability, regularization, set of Slater.*