

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062>
УДК 539.375

О.Л. Кіпніс, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з'єднання

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

З використанням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено плоску статичну задачу про стиск напівобмеженого тіла (основи) з тонким шаром покриття вздовж прямолінійної межі поділу двох різних матеріалів. В рамках моделі кусково-однорідного середовища розглянуто випадки, коли на межі поділу середовищ виконується умова жорсткого з'єднання та умова проковзування без тертя. Для випадку, коли для обох матеріалів корені відповідних характеристичних рівнянь є рівними, визначено критичні значення параметрів навантаження, що відповідають втраті приповерхневої стійкості кусково-однорідної півплощини, та проаналізовано їх залежність від фізико-механічних характеристик матеріалів.

Ключові слова: кусково-однорідна півплощина, матеріал з покриттям, приповерхнева стійкість, критичне навантаження, стиск вздовж межі поділу середовищ

Вступ. Вивчення процесу руйнування матеріалів з тонким шаром покриття (антикорозійним, зносостійким, теплоізоляційним, вогнетривким тощо) є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла, важливість якої обумовлена зростанням використання цих матеріалів в промисловості. В дослідженнях означених проблем [1–4] ефективно використовується апарат тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [5, 6], що застосовується до моделі кусково-однорідного середовища, з ви-

Ц и т у в а н н я: Кіпніс О.Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з'єднання. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 5. С. 62–74. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

користанням якої описуються шаруваті композитні матеріали (або конструкційні матеріали з шаром покриття) [7]. При цьому для багатьох задач перевагою застосування співвідношень ТЛТСДТ є можливість отримання результатів у загальній формі для широкого спектра матеріалів: стисливих і нестисливих, пружних і пружно-пластичних, ізотропних та анізотропних [2—4].

В рамках апарата ТЛТСДТ старт процесу руйнування однорідних та кусково-однорідних тіл за умови *відсутності дефектів* (наприклад, тріщин або зон проковзування) асоціюється з втратою внутрішньої або приповерхневої стійкості стану рівноваги матеріалу [7].

Так, під внутрішньою втратою стійкості розуміють явище, що виникає в структурі композитного матеріалу і яке не пов'язане з впливом граничної поверхні зразка (внутрішнє руйнування). Відповідні задачі розглядалися, наприклад, в [8] для випадку ідеального контакту між компонентами кусково-однорідного тіла та в [9] для випадку, коли вздовж межі поділу середовищ відбувається проковзування контактуючих шарів матриці та зв'язуючого.

Під приповерхневою (чи поверхневою) втратою стійкості розуміють явище, яке виникає тільки біля граничної поверхні зразка і визначається впливом цієї поверхні (приповерхнєве руйнування). В роботах [10—12] в рамках моделі кусково-однорідного середовища було досліджено приповерхнєве руйнування біля вільної граничної поверхні шаруватих композитів при стиску вздовж шарів. При цьому розглядалися композитні матеріали періодичної структури, що утворюються шляхом повторення «породжуючого» шару, який, у свою чергу, складається зі скінченної кількості по чергово розташованих шарів матриці та зв'язуючого.

У випадку *наявності дефектів* на межі поділу середовищ кусково-однорідного тіла описаним вище механізмам руйнування може передувати механізм руйнування, який пов'язується з втратою стійкості частини матеріалу в локальній області біля дефекту (локальна втрата стійкості) [13]. При цьому значення критичних параметрів навантаження (які відповідають приповерхневій або внутрішній втраті стійкості), що отримані в результаті розв'язання відповідних задач за умови *відсутності дефектів* на межі поділу середовищ можна розглядати як верхні або нижні оцінки значень аналогічних параметрів у задачах для тіл з *дефектами* на межі поділу середовищ [7]. Наприклад, значення критичного відносного укорочення в задачі про стиск кусково-однорідного тіла вздовж межі поділу середовищ (без дефектів) є верхньою граничною оцінкою для значень критичного відносного укорочення в задачі про стиск вздовж межі поділу середовищ цього ж кусково-однорідного тіла, послабленого міжфазними тріщинами. Аналогічно значення критичного відносного укорочення в задачі про стиск вздовж межі поділу середовищ кусково-однорідного тіла (без дефектів) за умови проковзування компонентів тіла є нижньою граничною оцінкою для значень критичного відносного укорочення в задачі про стиск вздовж межі поділу середовищ цього ж кусково-однорідного тіла за наявності на цій межі зони проковзування.

Мета даної роботи — визначення критичних параметрів навантаження (критичне відносне укорочення), які відповідають приповерхневій втраті стійкості кусково-однорідної півплощини при її стиску вздовж прямолінійної межі поділу середовищ з двома різними типами з'єднання її компонентів: жорстке з'єднання (ідеальний контакт) та

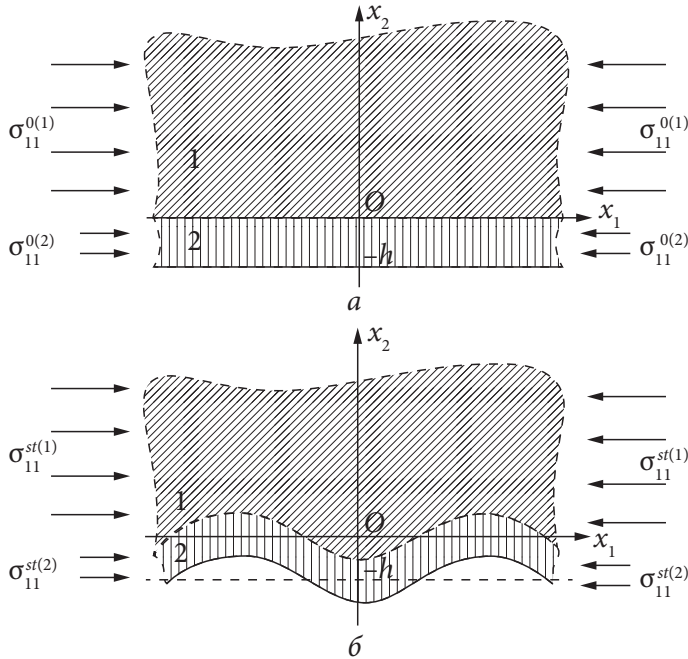


Рис. 1. Кусково-однорідна півплощина при стиску: *a* — докритичний стан, *b* — суміжний стан рівноваги

гладке проковзування. Отримані результати будуть використані при дослідженні руйнування кусково-однорідних напівобмежених тіл при стиску вздовж міжфазних приповерхневих дефектів типу тріщин та зон проковзування.

Постановка задач. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло,

що складається з однорідної ізотропної півплощини $x_2 \geq 0$ (матеріал "1", основа) та однорідної ізотропної смуги $-h \leq x_2 \leq 0$ (матеріал "2", покриття) (рис. 1, *a*). Досліджуються два випадки з'єднання компонентів "1" і "2" такого конструкційного тіла вздовж прямолінійної межі поділу середовищ $x_2 = 0$: *жорстке з'єднання* та *гладке проковзування*.

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const}, \quad i=1,2; \quad \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові видовження вздовж осі Ox_1 для матеріалів півплощини та смуги:

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_1 < 1,$$

де λ_1^1, λ_1^2 — коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно (тут і далі верхнім індексом "1" (в круглих дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу півплощини "1", а верхнім індексом "2" (в круглих дужках) — смуги "2").

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей "1" і "2" є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i=1,2. \tag{1}$$

У випадку, коли межа тіла $x_2 = -h$ є вільною від напружень, граничні умови сформульованої задачі записуються наступним чином, якщо має місце *жорстке з'єднання* компо-

нентів конструкційного тіла:

$$t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = -h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \quad (2)$$

$$t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \quad (3)$$

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty). \quad (4)$$

Якщо ж має місце *гладке проковзування* компонентів конструкційного тіла, замість умов (4) повинні виконуватись умови

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty). \quad (5)$$

Тут $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ — збурення компонент несиметричного тензору напружень Піоли—Кірхгофа \tilde{t} ; $u_k^{(i)}$, $i, k = 1, 2$ — збурення компонент вектора переміщень \mathbf{u} .

Ставиться задача визначити найближче до $\lambda_1 = 1$ (це значення відповідає випадку відсутності стискаючих навантажень) значення укорочення $\lambda_1^{st} < 1$ (критичне укорочення), для якого сформульовані однорідні задачі мають нетривіальний розв'язок, що свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 2, б) кусково-однорідної півплощини при неперервному збільшенні зовнішнього стискаючого навантаження до величини $\sigma_{11}^{st(1)}$ (для матеріалу "1") або $\sigma_{11}^{st(2)}$ (для матеріалу "2"), які відповідають визначеному значенню λ_1^{st} (критичне навантаження).

Додатково (для апробації підходу, що застосовується в роботі) розглянемо випадок, коли за *жорсткого з'єднання* компонентів конструкційного тіла на межі тіла $x_2 = -h$ виконується (замість умов (2)) умова закріплення у формі:

$$t_{22}^{(2)} = 0, \quad u_1^{(2)} = 0 \quad (x_2 = -h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty). \quad (6)$$

В описаній постановці крайова задача з умовами (3), (4), (6) еквівалентна задачі з дослідження внутрішньої стійкості смуги, що жорстко з'єднана з двома півплощинами [14] (для випадку антисиметричної (згинної) форми втрати стійкості [7]). Вказана задача досліджена з використанням іншого підходу в роботі [8].

Умова однорідності докритичного напружено-деформованого стану (1) є необхідною умовою застосовності підходу, який полягає у використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції [6, 14] (в рамках апарата ТЛТСДТ). Застосуємо вказаний підхід для задач плоскої деформації з крайовими умовами: (2) — (4) (*жорстке з'єднання*, межа $x_2 = -h$ вільна); (2), (3), (5) (*гладке проковзування*, межа $x_2 = -h$ вільна); (3), (4), (6) (*жорстке з'єднання*, межа $x_2 = -h$ закріплена). Розглядаємо випадок, коли матеріали "1" і "2" є різними, проте такими, що описуються однаковими пружними потенціалами, що мають *рівні корені* відповідних характеристичних рівнянь: $n_1^1 = n_2^1 = n_1^2 = n_2^2 = n$.

Увівши до розгляду для кожного з матеріалів гармонічні потенціальні функції $F^{(i)}$, $\phi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ та відповідні представлення збурень напружень і переміщень по аналогії до [6, 14], отримуємо такі співвідношення для граничних умов задачі (2) — (4) (*жорстке з'єднання*,

межа $x_2 = -h$ вільна) в термінах потенціальних функцій:

$$\begin{aligned}
 k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1} &= 0, \\
 k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} &= 0, \quad (z_1 = -h_1, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} &= k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1}, \\
 k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} &= k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} \quad (z_1 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} &= p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_1 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty),
 \end{aligned} \tag{7}$$

де $z_1 = n^{-1/2} x_2$, $h_1 = n^{-1/2} h$; $\Phi^i \equiv \frac{\partial \varphi^i}{\partial z_1}$, $i = 1, 2$.

Коефіцієнти в (7) є відомими функціями [6, 14] компонентів тензорів $\omega^{(i)}$ (для стисливих тіл)

$$k_{1,2,4,5}^i = k_{1,2,4,5}^i(\omega_{klmn}^i), \quad p_{1,2}^i = p_{1,2}^i(\omega_{klmn}^i), \quad i, k, l, m, n = 1, 2,$$

або функціями компонентів тензорів $\tilde{\alpha}^{(3)}$ (для нестисливих тіл):

$$k_{1,2,4,5}^i = k_{1,2,4,5}^i(\tilde{\alpha}_{klmn}^i), \quad p_{1,2}^i = p_{1,2}^i(\tilde{\alpha}_{klmn}^i), \quad i, k, l, m, n = 1, 2.$$

Для крайової задачі з умовами (2), (3), (5) (гладке проковзування, межа $x_2 = -h$ вільна) замість двох останніх умов в (7) (останній рядок) маємо:

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)}, \quad k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad (z_1 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty).$$

Для крайової задачі з умовами (3), (4), (6) (жорстке з'єднання, межа $x_2 = -h$ закріплена) замість першої умов в (7) (перший рядок) маємо:

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} - h_1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad (z_1 = -h_1, \quad 0 \leq |x_1| < \infty).$$

Характеристичні рівняння задач. З урахуванням симетрії конфігурації відносно осі Ox_2 , по аналогії до задач для однорідного тіла [14], представимо невідомі потенціальні

функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 :

$$\begin{aligned}
 F^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda, \\
 \varphi^{(1)}(x_1, z_1) &= -\int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
 \Phi^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_1} \cos \lambda x_1 d\lambda, \\
 F^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [C_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + C_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1}, \\
 \varphi^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [D_2(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + D_1(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \cos \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda \sinh \lambda h_1}, \\
 \Phi^{(2)}(x_1, z_1) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_1) + D_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_1)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Представлення (8) відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1, z_1)$ по координаті x_1 , тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$.

Записуючи тепер граничні умови (7) з врахуванням представлень (8), приходимо до наступної системи рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
 k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0, \\
 k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0, \\
 k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0, \\
 \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0, \\
 p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 &= 0, \\
 B + D_1 + \coth \mu \cdot D_2 &= 0, \\
 (\mu = \lambda h_1)
 \end{aligned} \tag{9}$$

для крайової задачі з умовами (2) — (4) (жорстке з'єднання, межа $x_2 = -h$ вільна).

Значення критичного укорочення $\lambda_1 = \lambda_1^{st}$, яке відповідає приповерхневій втраті стійкості кусково-однорідної півплощини (див. рис. 1, б), визначаємо з такої умови: λ_1 дорівнює найпершому при зменшенні починаючи з $\lambda_1 = 1$ значенню (що відповідає неперервному збільшенню зовнішнього стискаючого навантаження), при якому визначник системи рівнянь (9) обертається в нуль при деякому значенні $\mu > 0$, тобто коли виконується умова

$$\det \|M_I\| = 0, \tag{10}$$

де M_I — матриця з коефіцієнтів при невідомих функціях у системі (9).

Аналогічним чином отримується рівняння для визначення критичного укорочення для крайової задачі (2), (3), (5) (гладке проковзування, межа $x_2 = -h$ вільна):

$$\det \|M_{II}\| = 0 \quad (11)$$

та для крайової задачі (3), (4), (6) (жорстке з'єднання, межа $x_2 = -h$ закріплена):

$$\det \|M_{III}\| = 0. \quad (12)$$

Рівняння (10) — (12) можна розглядати як характеристичні рівняння для відповідних неklasичних задач на власні значення для системи лінійних однорідних рівнянь (у випадку жорсткого з'єднання компонентів конструкційного тіла з вільною межею $x_2 = -h$ це система (9)). При цьому параметр задачі (критичне укорочення λ_1) складним нелінійним чином входить в елементи матриць M_I, M_{II}, M_{III} .

Явний вигляд рівнянь (10) — (12) залежить від обраної моделі матеріалів. Указані характеристичні рівняння були отримані у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл у випадку, коли матеріали півплощини і смуги описуються однаковими пружними потенціалами (для високоеластичних матеріалів), для яких має місце випадок рівних коренів. Числові результати в задачах, що розглядаються, будуть отримані для потенціалу *Бартенева—Хазановича* (нестисливе тіло) та потенціалу *гармонічного типу* (стисливе тіло).

Потенціал *Бартенева—Хазановича* характеризується однією сталою μ_i для кожного матеріалу "1", "2", яка у випадку малих докритичних деформацій, що тут розглядається, переходить у коефіцієнт Ляме відповідного матеріалу і ототожнюється з його жорсткістю. Для потенціалу *Бартенева—Хазановича* у випадку плоскої задачі мають місце такі співвідношення [15]:

$$\begin{aligned} n_1^i &= n_2^i = (\lambda_1)^2, \quad \lambda_2^i = (\lambda_1)^{-1}, \quad \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-2}, \\ \lambda_1^{cr} &= 0,577, \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0,423, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (13)$$

($\varepsilon_1^i = 1 - \lambda_1^i$ — відносне укорочення відповідного матеріалу вздовж осі Ox_1).

У (13) λ_1^{cr} — критичне значення укорочення, що відповідає приповерхневій нестійкості *однорідної півплощини* (з матеріалу "1" або "2"), яке визначається видом пружного потенціалу [6, 14].

Потенціал *гармонічного типу* характеризується двома сталими: μ_i (у випадку малих докритичних деформацій це коефіцієнт Ляме матеріалу) та ν_i (у випадку малих докритичних деформацій це коефіцієнт Пуассона матеріалу) для кожного матеріалу "1" та "2", які визначають, відповідно, жорсткість матеріалу та його здатність до стисливості. Для потенціалу *гармонічного типу* у випадку плоскої задачі мають місце такі співвідношення [16]:

$$\begin{aligned} n_1^i &= n_2^i = 1, \quad \lambda_2^i = 1 - \nu_i(1 - \nu_i)^{-1}(\lambda_1 - 1), \quad \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-1}, \\ \lambda_1^{cr} &= 0,5, \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0,5, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Дослідження показує, що у випадку потенціалу *Бартенева—Хазановича* члени рівнянь (10) — (12) не залежать окремо від жорсткостей μ_1 та μ_2 матеріалів, а залежать тільки від

їх відношення $g = \mu_2/\mu_1$. У випадку потенціалу гармонічного типу члени рівнянь (10) — (12) залежать від відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1$ та від коефіцієнтів Пуассона матеріалів ν_1 та ν_2 .

Для апробації підходу, що застосовується в роботі, розглянемо спочатку задачу з крайовими умовами (3), (4), (6) (жорстке з'єднання, межа $x_2 = -h$ закріплена), якій відповідає характеристичне рівняння (12).

В таблиці наведено значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1^{st} = 1 - \lambda_1^{st}$, яке відповідає приповерхневій нестійкості кусково-однорідної площини, що досліджується, для деяких значень параметра $g = \mu_2/\mu_1$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0,25$)

g	3,05	5	10	20	40	80	100	200	400
ε_1^{st}	0,499	0,357	0,222	0,137	0,085	0,053	0,045	0,028	0,018

Наведені в таблиці результати добре узгоджуються з результатами задачі з дослідження внутрішньої стійкості смуги, що жорстко з'єднана з двома півплощинами [8], яка для випадку антисиметричної (згинної) форми втрати стійкості) еквівалентна задачі з крайовими умовами (3), (4), (6).

Приповерхнева втрата стійкості кусково-однорідної півплощини з вільною межею за умови жорсткого з'єднання компонентів. Як показує дослідження характеристичного рівняння (10) задачі, у випадку матеріалів з потенціалом *Бартенева—Хазановича* (нестисливе тіло) та з потенціалом *гармонічного типу* (стисливе тіло), явище приповерхневої втрати стійкості *кусово-однорідної півплощини* (див. рис. 1, б) передує явищу приповерхневої втрати стійкості *однорідної півплощини*, виготовленої з одного із матеріалів, що утворюють кусково-однорідне тіло, лише у випадку, коли матеріал смуги "2" є більш жорстким, ніж матеріал основи "1", тобто за умови

$$g = \mu_2/\mu_1 > 1.$$

Коли $g \rightarrow 1+$, значення критичного укорочення, що відповідають приповерхневій втраті стійкості *кусово-однорідної площини*, прямує до значення, що відповідає приповерхневій втраті стійкості *однорідної півплощини*, виготовленої з одного з матеріалів "1" або "2":

$$\lambda_1^{st} \rightarrow \lambda_1^{cr} \quad \text{при} \quad g \rightarrow 1+.$$

На графіках, наведених на рис. 2, зображена залежність значень критичного відносного укорочення $\varepsilon_1^{st} = 1 - \lambda_1^{st}$ від значень параметра $g = \mu_2/\mu_1$ для відносно невеликих значень $g > 1$. Рис. 2, а відповідає випадку потенціалу *Бартенева-Хазановича*, а рис. 2, б — потенціалу *гармонічного типу*. У випадку потенціалу *гармонічного типу* значення відносного критичного укорочення ε_1^{st} майже не залежать від значень коефіцієнта Пуассона ν_1 основи, проте суттєво залежать від значень коефіцієнта Пуассона ν_2 шару покриття. На

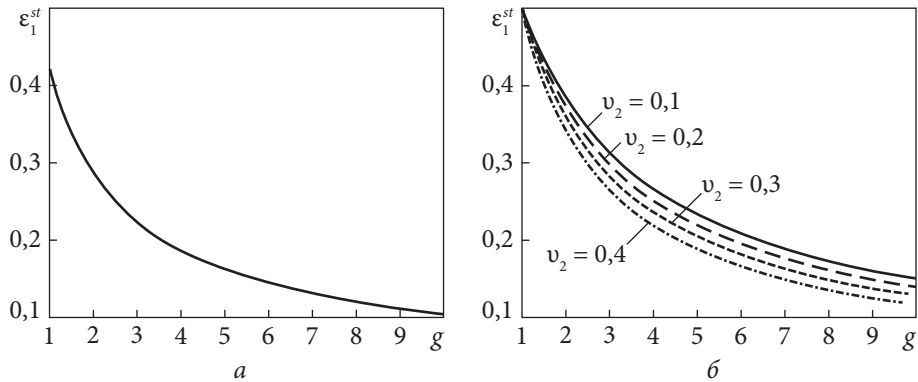


Рис. 2. Залежності критичного відносного укорочення ε_1^{st} від значення параметра $g = \mu_2/\mu_1$ у випадку: *a* — матеріалів з пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича; *б* — матеріалів з пружним потенціалом гармонічного типу (жорстке з'єднання компонентів)

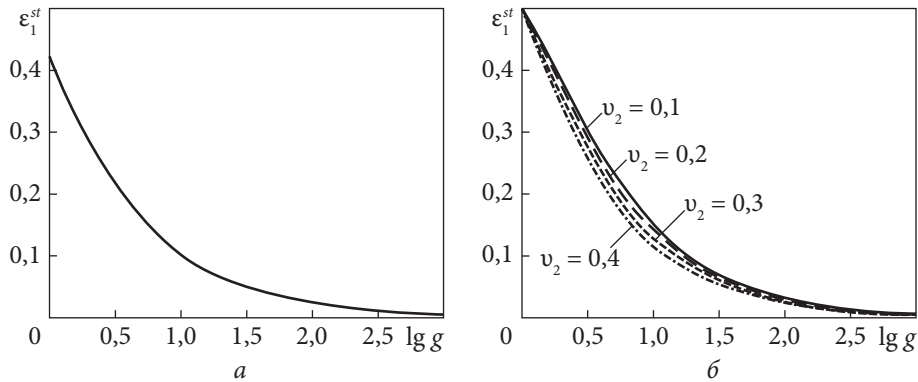


Рис. 3. Залежності критичного відносного укорочення ε_1^{st} від значення параметра $\lg g$ у випадку: *a* — матеріалів з пружним потенціалом Бартенєва—Хазановича; *б* — матеріалів з пружним потенціалом гармонічного типу (жорстке з'єднання компонентів)

графіку рис. 2, *б* криві побудовані для фіксованого значення $\nu_1 = 0,3$ та різних значень $\nu_2 = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$. Як показує графік, наведений на рис. 2, *б*, значення параметра критичного відносного укорочення, що відповідає поверхневій нестійкості кусково-однорідної півплощини, зменшується зі збільшенням ν_2 при фіксованих значеннях ν_1 та g .

За аналогією з графіками, наведеними на рис. 2, залежність значень критичного відносного укорочення ε_1^{st} від значень параметра $\lg g$ з використанням логарифмічної шкали для широкого діапазону зміни параметра g наведена на графіках, зображених на рис. 3.

Як свідчать результати дослідження, що більше відрізняється жорсткість матеріалів "1" і "2", тим меншим є значення критичного відносного укорочення, що відповідає приповерхневій нестійкості кусково-однорідної півплощини.

Приповерхнева втрата стійкості кусково-однорідної півплощини з вільною межею за умови проковзування компонентів. Як показує дослідження характеристичного рів-

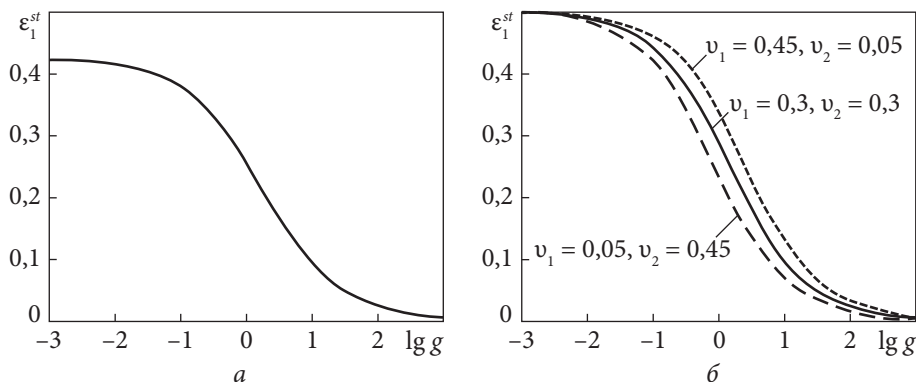


Рис. 4. Залежності критичного відносного укорочення ε_1^{st} від значення параметра $\lg g$ у випадку: *а* — матеріалів з пружним потенціалом *Бартенєва—Хазановича*; *б* — матеріалів з пружним потенціалом гармонічного типу (гладке проковзування компонентів)

няння (11) задачі, для випадку матеріалів з кожного потенціалом *Бартенєва—Хазановича* (нестисливе тіло) та з потенціалом *гармонічного типу* (стисливе тіло) явище приповерхневої нестійкості *кусово-однорідної* півплощини (див. рис. 1, б) переважає явищу приповерхневої втрати стійкості *однорідної* півплощини, виготовленої з одного із матеріалів, що утворюють кусково-однорідне тіло, для всіх значень параметра $g > 0$.

Коли $g \rightarrow 0$ (жорсткість матеріалу основи необмежено зростає по відношенню до жорсткості матеріалу покриття), значення критичного укорочення, що відповідають приповерхневій нестійкості *кусово-однорідної* площини, прямує до значення, що відповідає приповерхневій нестійкості *однорідної* півплощини, виготовленої з одного з матеріалів "1" або "2":

$$\lambda_1^{st} \rightarrow \lambda_1^{cr} \quad \text{при} \quad g \rightarrow 0.$$

На графіках, наведених на рис. 4, зображена залежність значень критичного відносного укорочення $\varepsilon_1^{st} = 1 - \lambda_1^{st}$ від значень параметра $\lg g$ з використанням логарифмічної шкали для широкого діапазону зміни параметра g . Рис. 4, *а* відповідає випадку потенціалу *Бартенєва—Хазановича*, а рис. 4, *б* — потенціалу *гармонічного типу*. У випадку потенціалу *гармонічного типу* значення відносного критичного укорочення ε_1^{st} суттєвим чином залежать як від значень коефіцієнта Пуассона ν_2 шару покриття, так і від значень коефіцієнта Пуассона ν_1 основи. На рис. 4, *б* криві побудовані для таких значень коефіцієнтів Пуассона: $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,3$; $\nu_1 = 0,05$, $\nu_2 = 0,45$ та $\nu_1 = 0,45$, $\nu_2 = 0,05$.

Аналіз чисельних результатів показує, що значення параметра критичного відносного укорочення, що відповідають приповерхневій втраті стійкості *кусово-однорідної* півплощини, зменшується зі збільшенням ν_2 при фіксованих значеннях ν_1 і g та збільшується зі збільшенням ν_1 при фіксованих значеннях ν_2 і g . При цьому вплив стисливості матеріалів, що характеризується коефіцієнтом Пуассона, на критичні значення ε_1^{st} сягає 40 %.

Висновки. На основі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл для плоскої задачі визначено критичні значення параметра навантаження (критичне відносне укорочення), що відповідають приповерхневій втраті стійкості *кусово-однорідної* пів-

площини при стиску вздовж прямолінійної межі поділу двох різних компонентів: однорідної ізотропної основи та однорідного ізотропного шару покриття.

Числові результати представлені для випадків, коли матеріали конструкційного тіла, що досліджується, описуються пружним потенціалом *Бартенєва—Хазановича* (нестисливе тіло) та потенціалом *гармонічного типу* (стисливе тіло).

В частинному випадку спеціального закріплення межі півплощини отримані в роботі результати узгоджуються з відомими в літературі результатами.

Коли межа півплощини є вільною від напружень, досліджено випадки жорсткого з'єднання компонентів конструкційного тіла та гладкого проковзування між ними. Проаналізовано залежність значення критичного відносного укорочення від фізико-механічних характеристик матеріалів тіла.

Коли компоненти тіла жорстко з'єднанні між собою, явище приповерхневої втрати стійкості спостерігається лише для тих тіл, в яких матеріал покриття є більш жорстким, ніж матеріал основи; коли ж між компонентами тіла відбувається проковзування без тертя, це явище спостерігається за будь-яких значень відношення жорсткостей матеріалів тіла. При цьому значення критичного відносного укорочення, що відповідає приповерхневій втраті стійкості кусково-однорідного тіла, компоненти якого жорстко закріплені (якщо це явище спостерігається), завжди є більшим, ніж аналогічне значення критичного відносного укорочення для цього ж тіла, але з проковзуванням між його компонентами. Останній результат цілком узгоджується з міркуваннями фізичного характеру.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review). *Int. Appl. Mech.* 2014. **50**, № 1. P. 1—57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
2. Guz A.N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (Review) III. *Int. Appl. Mech.* 2019. **55**, № 4. P. 343—415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
3. Guz A.N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. — *Advanced Structure Materials*, Vol. 159. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. 366 p.
4. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Two-Dimensional Problems on the Fracture of Bodies Under Compression Along Cracks. In: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. *Fracture of Materials Under Compression Along Cracks*. *Advanced Structured Materials*, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 149—248.
5. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев.: Наук. думка, 1973. 274 с.
6. Guz A.N. *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1999. 555 p.
7. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. Киев.: «ЛІТЕРА», 2008.
8. Бабич И.Ю., Бакланова Г.Н. Устойчивость полосы, расположенной между двумя полупространствами. *Прикл. механика*. 1987. **23**, №1. С. 24—35.
9. Guz I.A. Plane problem of the stability of composites with slipping layers. *Mech. Comp. Mater.* 1991. **27**. P. 547—551. <https://doi.org/10.1007/BF00613480>
10. Гузь А.Н., Чехов В.Н., Шульга Н.А. Поверхностная неустойчивость полупространства периодической структуры. *ДАН СССР*. 1982. **266**, №6. С. 1306—1310.
11. Chekhov V.N. Surface instability of a layered medium connected to a uniform half-space. *Sov. Appl. Mech.* 1984. **20**, № 11. P. 1018—1025. <https://doi.org/10.1007/BF00886693>
12. Guz A.N., Chekhov V.N., Stukotilov V.S. Effect of anisotropy in the physicomaterial properties of a material on the surface instability of layered semiinfinite media. *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, № 2. P. 87—92.
13. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача. *ДАН СССР*. 1981. **259**, №6. С. 1315—1318.

14. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. Киев: Наук. думка, 1992. 456 с. (Неклассические проблемы механики разрушения в 4-х т., 5-и кн. Под общ. ред. А.Н. Гузя; Т.4, кн. 1).
15. Бартнев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров. *Высокомолекулярные соединения*. 1960. 2, №1. С. 21—28.
16. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Common. Pure and Appl. Math.* 1960. 13, № 2. P. 239—296. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206>

Надійшло до редакції 20.05.2024

REFERENCES

1. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.*, 50, No. 1, pp. 1-57. <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
2. Guz, A. N. (2019). Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50-th anniversary of the research (review) III. *Int. Appl. Mech.*, 55, No. 4, pp. 343-415. <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4>
3. Guz, A. N. (2021). Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. *Advanced Structure Materials*, Vol. 159. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
4. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Two-Dimensional Problems on the Fracture of Bodies Under Compression Along Cracks. In: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. *Fracture of Materials Under Compression Along Cracks*. *Advanced Structured Materials*, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
5. Guz, A. N. (1973). Stability of elastic bodies under finite deformations. Kyiv.: Nauk. Dumka (in Russian).
6. Guz, A. N. (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
7. Guz, A. N. (2008). *Fundamentals of the compressive fracture mechanics of composites: in 2 volumes*. Kyiv: LITERA (in Russian).
8. Babych, I. Yu. & Bakhlanova, G. N. (1987). Stability of a strip located between two half-spaces. *Prikl. mehanikha*, 23, No. 1. pp. 24-35 (in Russian).
9. Guz, I. A. (1991). Plane problem of the stability of composites with slipping layers. *Mech. Comp. Mater.*, 27, pp. 547-551. <https://doi.org/10.1007/BF00613480>
10. Guz, A. N., Chekhov, V. N. & Shulga, N. A. (1982). Surface instability of a half-space of a periodic structure. *Doklady Akademii Nauk USSR*, 266, No. 6, pp. 1306-1310 (in Russian).
11. Chekhov, V. N. (1984). Surface instability of a layered medium connected to a uniform half-space. *Sov. Appl. Mech.*, 20, No. 11, pp. 1018-1025. <https://doi.org/10.1007/BF00886693>
12. Guz, A. N., Chekhov, V. N. & Stukotilov, V. S. (1997). Effect of anisotropy in the physicomechanical properties of a material on the surface instability of layered semiinfinite media. *Int. Appl. Mech.*, 33, No. 2, pp. 87-92.
13. Guz, A. N. (1981). On one criterion for the fracture of solids under compression along cracks. *Plane problem. Doklady Akademii Nauk USSR*, 259, No. 6, pp. 1315-1318 (in Russian).
14. Guz, A. N., Dishel, M. Sh. & Nazarenko, V. M. (1992). Fracture and stability of materials with cracks. Kyiv: Nauk. dumka, (Non-classical problems of fracture mechanics in 4 volumes, 5 books. Under general ed. A.N. Guz; vol.4, book. 1).
15. Bartnev, G. M. & Khazanovich, T. N. (1960). On the law of highly elastic deformations of network polymers. *Vysokomolekulyarnyye Soyedineniya*, 2, No. 1, pp. 21-28 (in Russian).
16. John, F. (1960). Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Common. Pure and Appl. Math.*, 13, No. 2, pp. 239-296. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206>

Received 20.05.2024

A.L. Kipnis, <https://orcid.org/0000-0001-6747-8584>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

SURFACE STABILITY OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS
HALF-PLANE UNDER COMPRESSION ALONG A RECTILINEAR INTERFACE
UNDER DIFFERENT CONDITIONS OF CONNECTION OF BODY ELEMENTS

Using the relations of the three-dimensional linearized stability theory of deformable bodies, the plane static problem of compression of a semi-bounded body (base) with a thin coating layer along a rectilinear interface is studied. Within the framework of the piecewise homogeneous medium model, the cases when the conditions of rigid connection and frictionless sliding conditions are fulfilled at the interface are considered. For the case when the roots of the corresponding characteristic equations are equal for both materials, the critical values of the load parameters corresponding to the loss of surface stability of the piecewise homogeneous half-plane are determined and their dependence on the mechanical characteristics of the materials is analyzed.

Keywords: *piecewise homogeneous half-plane, material with coating, near-surface stability, critical load, compression along interface.*